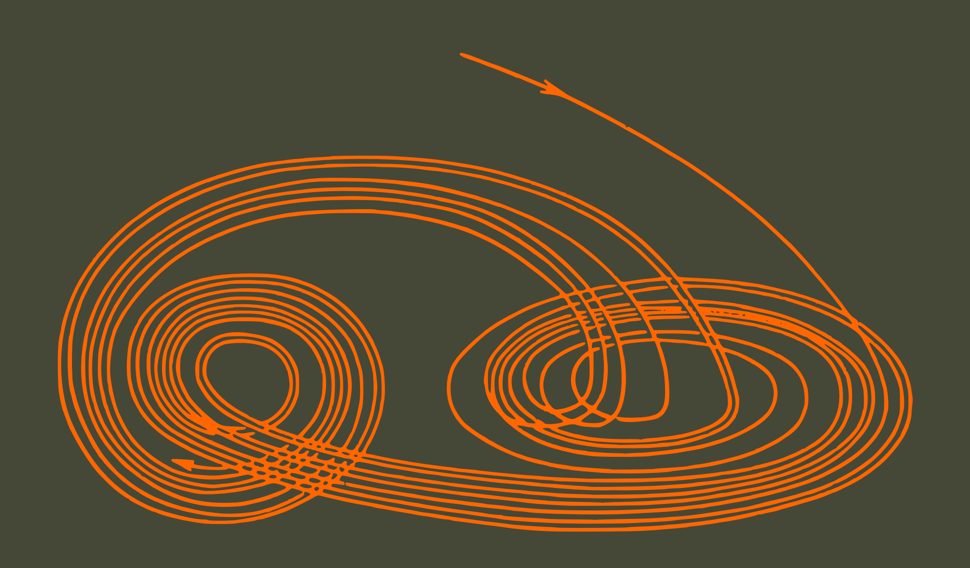
V. Arnold

Equations Différentielles Ordinaires



Editions Mir Moscou

V. ARNOLD

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

4 ème édition
remaniée et complétée



ÉDITIONS MIR · MOSCOU

Traduit du russe par
DJILALI EMBAREK

1ère édition 1974
2ème édition 1978
3ème édition 1981

На французском языке

Imprimé en Union Soviétique

ISBN 5-03-000299-5

TABLE DES MATIÈRES

AVANT-PROPOS À LA QUATRIÈME ÉDITION FRANÇAISE

Les deux premiers chapitres de cet ouvrage ont été profondément remaniés et sensiblement élargis par l'adjonction de sections sur les méthodes élémentaires d'intégration (sur les équations linéaires homogènes et non homogènes du premier ordre, les équations homogènes et quasi homogènes), sur les équations linéaires et quasi linéaires aux dérivées partielles du premier ordre, sur les équations non résolues par rapport aux dérivées et sur les théorèmes de Sturm relatifs aux zéros des équations linéaires du second ordre. La nouvelle édition comporte donc toutes les questions du programme actuel de théorie des équations différentielles ordinaires.

En développant les méthodes spéciales d'intégration, l'auteur s'est attaché partout à mettre l'accent sur l'aspect géométrique desdites méthodes et à montrer comment elles jouaient dans les applications et notamment en mécanique. Ainsi pour intégrer une équation linéaire non homogène, on introduit la fonction de Dirac et l'on calcule la fonction retardée de Green ; les équations quasi homogènes conduisent à la théorie de la similitude et à la loi de la gravitation universelle, le théorème de dérivabilité de la solution par rapport aux conditions initiales, à l'étude du mouvement relatif des corps cosmiques sur des orbites voisines.

L'auteur s'est permis de faire quelques digressions historiques dans cet avant-propos. Les équations différentielles ont été inventées par Newton (1642-1727). Newton était si convaincu de l'importance de sa découverte qu'il la chiffra sous forme d'un anagramme dont la traduction libre en termes modernes serait: « les lois naturelles s'expriment par des équations différentielles ».

Le principal acquis scientifique de Newton est le développement des fonctions en séries entières (le sens du deuxième anagramme de Newton est que pour résoudre une équation il faut y substituer une série et identifier les termes de même puissance). La formule du binôme (pas seulement à exposants entiers, qui était déjà connue, par exemple de Viète (1540-1603), mais, et ce qui est particulièrement important, à exposants fractionnaires et négatifs) qu'il inventa fut prépondérante. Newton développa en « séries de Taylor » les principales fonctions élémentaires (rationnelles, trigonométriques, exponentielle, logarithme, radicaux). Avec la table des primitives (qui est passée intégralement dans les manuels modernes d'analyse) ceci lui permit, de son propre aveu, de comparer les aires de toutes figures en « un demi-quart d'heure ».

Newton signala que les coefficients de ses séries étaient proportionnels aux dérivées successives de la fonction mais ne s'attarda pas sur ce fait, estimant à juste titre qu'en analyse il était plus commode de conduire les calculs non pas par des dérivations sucessives mais en déterminant les premiers termes de la série. Pour Newton, le lien entre les coefficients de la série et les dérivées était plus un moyen de calcul des dérivées qu'un moyen de composition des séries.

L'une des plus importantes réalisations de Newton est sa théorie du système solaire, qu'il exposa dans les *Principes mathématiques de philosophie haturelle* (*Principia*) sans recourir à l'analyse mathématique. On admet généralement que Newton découvrit la loi de la gravitation universelle à l'aide de son analyse mathématique. En fait, Newton (1680) ne produisit que la démonstration de l'ellipticité des orbites dans le champ gravitationnel en s'appuyant sur la loi des carrés inverses : cette loi, qui était probablement pressentie par quelques savants, lui fut indiquée par Hooke (1635-1703) (cf. § 8).

L'ère de la physique moderne commence par les *Principia* de Newton. L'analyse s'ériga en discipline autonome grâce à Leibniz (1646-1716). L'immense mérite de Leibniz est d'avoir largement contribué au rayonnement de l'analyse (la publication du premier article date de 1684) et d'avoir porté ses algorithmes *) à un automatisme total : il inventa ainsi une méthode qui apprenait à se servir de l'analyse (et à l'enseigner) à des gens qui n'y entendaient pas grand-chose, tendance contre laquelle il faut, hélas, se battre même de nos jours.

Les travaux d'Euler (1707-1783) et de Lagrange (1736-1813) émergent de l'immense flot des publications du XVIIIe siècle sur les équations différentielles. Ces travaux développaient essentiellement la théorie des petites oscillations, donc la théorie des systèmes linéaires d'équations différentielles ; les notions fondamentales d'algèbre linéaire (valeurs et vecteurs propres en dimension n) apparaissaient incidemment. L'équation caractéristique d'un opérateur linéaire fut longtemps appelée équation séculaire, car elle permet précisément de déterminer les perturbations séculaires (i.e. petites par rapport au mouvement annuel) des orbites des planètes conformément à la théorie des petites oscillations de Lagrange. Dans la foulée de Newton, Laplace, Lagrange et, plus tard, Gauss (1777-1855) développent aussi les méthodes de la théorie des perturbations.

Lorsque l'impossibilité de résoudre des équations algébriques par des radicaux fut établie, Liouville (1809-1882) bâtit une théorie similaire pour

---

*) Du reste, c'est à Leibniz qu'on doit les notions de matrices, la notation a_{ij}, les bases de la théorie des déterminants et des systèmes d'équations linéaires, ainsi que l'une des premières machines à calculer.

les équations différentielles et montra qu'il était impossible d'intégrer de nombreuses équations (notamment des équations aussi classiques que les équations linéaires du second ordre) par des fonctions élémentaires et des quadratures. Plus tard, S. Lie (1842-1899), au terme de son analyse de l'intégration d'équations par des quadratures, fut conduit à étudier en détail les groupes de difféomorphismes (qui porteront son nom) : ainsi, de la théorie des équations différentielles est né l'un des domaines les plus féconds de la mathématique moderne, domaine dont le développement sera lié à des questions de toute autre nature (les algèbres de Lie furent déjà étudiées par Poisson (1781-1840) et essentiellement par Jacobi (1804-1851)).

Les travaux de Poincaré (1854-1912) constituent un tournant dans la théorie des équations différentielles : sa « théorie qualitative des équations différentielles » combinée à la théorie des fonctions de variables complexes a posé les assises de la topologie moderne. La théorie qualitative des équations différentielles, plus connue aujourd'hui sous le nom de théorie des systèmes dynamiques, est la branche de la théorie des équations différentielles, qui se développe le plus activement et possède les plus importantes applications scientifiques. Les mathématiciens russes : A. Liapounov (1857-1918) avec ses travaux classiques sur la théorie de la stabilité, A. Andronov (1901-1952), sur la théorie des bifurcations, A. Andronov et L. Pontriaguine, sur la stabilité structurelle, N. Krylov (1879-1955) et N. Bogolioubov, sur la théorie de la moyenne et A. Kolmogorov, sur la théorie des perturbations des mouvements pseudo-périodiques ont apporté une importante contribution au développement de la théorie des équations différentielles. La discussion des acquis actuels déborde le cadre de cet ouvrage (certains d'entre eux sont accessibles dans d'autres ouvrages de l'auteur : *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles*, Moscou, éd. Mir, 1980 ; *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, Moscou, éd. Mir, 1976 ; *Théorie des catastrophes*, Moscou, éd. Naouka, 1981).

L'auteur exprime sa gratitude à tous les lecteurs des éditions précédentes pour leurs suggestions dont il a essayé de tenir compte en remaniant cet ouvrage, ainsi qu'à D. Anossov dont les multiples remarques ont contribué à perfectionner le contenu de la présente édition.

V. Arnold

EXTRAIT DE L'AVANT-PROPOS À LA PREMIÈRE ÉDITION

L'auteur de cet ouvrage s'est limité à un strict minimum dans son exposé. Ce cours est articulé sur deux questions fondamentales : le théorème des redressement d'un champ de vecteurs (qui est l'équivalent des théorèmes d'existence, d'unicité et de différentiabilité des solutions) et la théorie de groupes à un paramètre de transformations linéaires (i.e. la théorie des systèmes linéaires autonomes).

Les applications des équations différentielles ordinaires à la mécanique font l'objet d'un examen plus détaillé que de coutume. L'équation du pendule est abordée dès les premières pages ; ce sera une sorte d'étalons qui nous permettra à chaque fois de vérifier l'efficacité des méthodes et notions introduites. Ainsi, dans le paragraphe qui traite des intégrales premières, sera examiné le principe de conservation de l'énergie ; du théorème de différentiation par rapport au paramètre nous déduirons la « méthode du petit paramètre » ; quant à la théorie des équations linéaires à coefficients périodiques, elle débouche tout naturellement sur l'étude de la balançoire (« résonance paramétrique »).

L'exposé de nombreux problèmes diffère des méthodes traditionnelles. L'auteur s'est en effet partout attaché à mettre en exergue l'aspect géométrique, qualitatif des phénomènes abordés. Aussi, cet ouvrage, est-il émaillé de nombreux croquis et ne contient-il aucune formule tant soit peut fastidieuse. Par ailleurs, il éclaircit bien des notions fondamentales laissées à l'ombre par les méthodes classiques (espace des phases et flots ; variétés différentiables et fibrés vectoriels ; champs de vecteurs et groupes à un paramètre de difféomorphismes). Ce cours aurait été grandement simplifié si certaines notions avaient été connues. Malheureusement, à ce jour, les problèmes en question ne sont étudiés ni en analyse ni en géométrie. Force a donc été à l'auteur de les exposer suffisamment en détail sans supposer au lecteur des connaissances préliminaires débordant le cadre des traditionnels cours élémentaires d'analyse et d'algèbre linéaire.

Le présent ouvrage est composé pour l'essentiel des cours donnés par l'auteur aux élèves de deuxième année de l'Université de Moscou en 1968-1969 et 1969-1970.

L'auteur tient à exprimer sa profonde reconnaissance à R. Bogdanov pour ses précieux services dans la préparation des cours polycopiés ; à tous ses élèves et ses collègues pour leurs suggestions ; à D. Anossov et S. Krein pour leur attentive analyse des manuscrits.

1971 *V. Arnold*

CHAPITRE PREMIER

NOTIONS FONDAMENTALES

§ 1. Espaces des phases et flots

La théorie des équations différentielles ordinaires est l'un des principaux instruments des mathématiques. Elle permet d'étudier quantité de processus d'évolution *déterministes, finis* et *différentiables.* Avant de donner à ces processus une définition mathématique rigoureuse examinons quelques exemples.

1. Exemples de processus d'évolution. On dit qu'un processus est *déterministe* si toute son évolution et son passé sont définis de façon unique par son état présent. L'ensemble de tous les états de ce processus s'appelle *espace des phases.*

Ainsi, en mécanique classique, on étudie le mouvement de systèmes dont l'avenir et le passé sont univoquement définis par les positions et les vitesses initiales de tous les points du système. L'espace des phases d'un tel système mécanique est un ensemble dont les éléments sont constitués par l'ensemble des positions et vitesses de tous les points du système considéré.

En mécanique quantique, le mouvement des particules n'est pas un processus déterministe. La propagation de la chaleur, elle, est un processus semi-déterministe en ce sens que son avenir est déterminé par son présent, tandis que son passé ne l'est pas.

Un processus est de *dimension finie* s'il en est de même de son espace des phases, c'est-à-dire si est fini le nombre des paramètres indispensables à la description de son état. Tel est en mécanique classique par exemple, le cas d'un système constitué d'un nombre fini de points matériels ou de corps solides. La dimension de l'espace des phases est de $6n$ pour un système de n points matériels, et de $12n$ pour un système de n solides. Les mouvements des fluides en hydrodynamique, les vibrations de la corde et de la membrane, la propagation des ondes en optique et en acoustique sont des exemples de processus qu'il est impossible de décrire dans un espace des phases de dimension finie.

Un processus est *différentiable* si son espace des phases est muni d'une structure de variété différentiable, et ses changements d'état dans le temps, définis par des fonctions différentiables. Les coordonnées et les vitesses des points d'un système mécanique sont différentiables par rapport au temps. Les mouvements étudiés en théorie du choc ne sont pas différentiables.

En mécanique classique donc, le mouvement d'un système peut être décrit par des équations différentielles ordinaires, tandis que d'autres procédés seront nécessaires en mécanique quantique, en théorie de la chaleur, en hydrodynamique, en théorie de l'élasticité, en optique, en acoustique et en théorie du choc.

Citons encore deux exemples de processus déterministes, finis et différentiables : la désintégration radio-active et la reproduction de bactéries dans un bouillon de culture en quantité suffisante. Dans les deux cas l'espace des phases est à une dimension : l'état du processus est défini soit par la quantité restante de matière radio-active, soit par le nombre de bactéries Dans les deux cas le processus est décrit par une équation différentielle ordinaire.

Remarquons que la forme de l'équation différentielle ordinaire décrivant un processus ainsi que le fait même que tel processus est déterministe, fini et différentiable ne peuvent être établis qu'expérimentalement, donc avec un certain degré de précision. A l'avenir nous nous dispenserons de souligner à chaque fois cette circonstance et nous opérerons avec les processus réels comme s'ils coïncidaient avec nos modèles mathématiques idéalisés.

2. Flots. La formulation exacte des principes généraux exposés ci-dessus fait appel aux notions relativement abstraites d'*espace des phases* et de *flot.* Pour bien les assimiler, voyons un exemple où la seule introduction de l'espace des phases permet de résoudre un problème épineux.

Exercice (N. Konstantinov). Des villes A et B (fig. 1) sont reliées par deux routes ne se coupant nulle part. On sait que deux mobiles empruntant chacun une de ces voies et liés entre eux par une ficelle d'une longueur strictement inférieure à $2l$ peuvent se rendre de A en B sans rompre cette ficelle. On demande si deux véhicules sphériques de rayon l, dont les centres se déplacent sur chacune de ces routes, l'un à la rencontre de l'autre, peuvent se croiser sans se heurter.

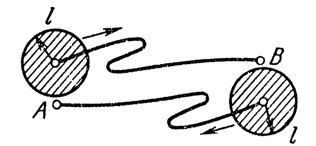


Fig. 1. Position de départ des véhicules sphériques

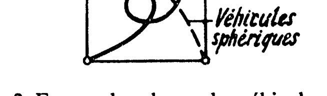


Fig. 2. Espace des phases des véhicules et des mobiles

Solution. Examinons le carré (fig. 2)

$$M = \{x_1, x_2 : 0 \leqslant x_i \leqslant 1\}.$$

On peut représenter la position des deux mobiles (l'un se déplaçant sur la première route, l'autre sur la seconde) par un point du carré M : il suffit pour cela de désigner par x_i la fraction de distance AB parcourue sur la route i en partant de A.

Toutes les positions des deux mobiles sont représentées par des points du carré M. Ce carré est appelé *espace des phases* et ses points, *points représentatifs*. Donc, à chaque déplacement des mobiles est associé un déplacement du point représentatif correspondant dans l'espace des phases.

Les mobiles partent de la ville A que nous supposerons correspondre à l'angle inférieur gauche du carré ($x_1 = x_2 = 0$), quant à leur déplacement de A en B, il est représenté par la courbe qui mène à l'angle opposé.

De la même manière, les véhicules sphériques partent de l'angle inférieur droit ($x_1 = 0$, $x_2 = 1$), quant à leur mouvement il est représenté par la courbe conduisant à l'angle opposé du carré.

Or dans un carré, deux courbes quelconques joignant les couples de sommets opposés se coupent. Donc, quel que soit le mouvement des véhicules sphériques, il arrivera un instant où ils occuperont une position déjà occupée par le couple de mobiles. A cet instant la distance séparant les centres des véhicules sphériques sera $<2l$, de sorte qu'il leur est impossible de ne pas se heurter.

Dans cet exemple nous n'avons pas fait intervenir les équations différentielles, mais notre raisonnement est proche de ce que nous allons étudier par la suite : il est souvent très utile d'assimiler chaque état d'un processus à un point d'un espace convenable.

Par exemple, l'état du mouvement d'un système de n points matériels se décrit en mécanique classique par les valeurs des coordonnées et des vitesses de tous ces points. Donc, l'espace des phases d'un tel système est à $6n$ dimensions (trois coordonnées et trois composantes de la vitesse pour chaque point). L'espace des phases d'un système de trois points (Soleil, Jupiter, Saturne) est à 18 dimensions. L'espace des phases d'un système de n solides est à $12n$ dimensions (pourquoi ?).

Le mouvement d'un système se décrit par le mouvement du point représentatif sur une courbe de l'espace des phases. La vitesse de déplacement du point représentatif sur cette courbe est définie par ce point même. Donc en chaque point de l'espace des phases est donné un vecteur appelé *vecteur vitesse de phase*. Les vecteurs vitesses de phase forment un champ de vitesses de phase dans l'espace des phases. Ce champ de vecteurs définit l'équation différentielle du processus (la dépendance de la vitesse du point représentatif par rapport à sa position).

Le problème fondamental de la théorie des équations différentielles consiste à déterminer ou à étudier le mouvement d'un système d'après le champ de vitesses de phase. Cette étude porte par exemple sur la forme des orbites

(ou trajectoires du mouvement du point représentatif) : les orbites du champ de vecteurs envisagé dans un espace des phases s'éloignent-elles à l'infini ou restent-elles confinées dans un domaine borné ?

Dans le cas général, ce problème ne peut être résolu par les outils mathématiques modernes et semble-t-il est insoluble dans un certain sens (en particulier le problème des trois corps). Dans les cas particuliers les plus simples par lesquels nous débuterons, ce problème se résout explicitement par des quadratures. Les ordinateurs permettent de trouver des solutions approchées des équations différentielles sur un intervalle de temps fini, mais ne fournissent aucune réponse aux problèmes qualitatifs relatifs au comportement des orbites dans leur ensemble. Dans la suite, en plus des méthodes d'intégration explicite d'équations différentielles spéciales, nous exhiberons certaines méthodes d'étude qualitative.

La notion d'espace des phases ramène l'étude des processus d'évolution à des problèmes de géométrie sur les courbes définies par les champs de vecteurs. Nous commençons l'examen des équations différentielles par le problème de géométrie suivant.

3. Courbes intégrales d'un champ de directions. Supposons qu'en chaque point d'un domaine du plan on ait choisi une droite passant par ce point. On dit alors qu'un champ de directions est donné dans ce domaine (fig. 3).

REMARQUE 1. Deux courbes différentiables passant par un même point définissent une même direction si elles sont tangentes en ce point. Donc, dans la définition d'un champ de directions, les droites peuvent être remplacées par des courbes différentiables : seule importe la tangente à la courbe au point envisagé. La figure 3 représente une petite portion de droite en chaque point.

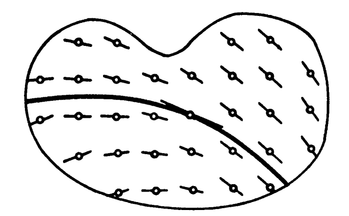


Fig. 3. Champ de directions et courbe intégrale de ce champ

REMARQUE 2. Tous les objets (fonctions, applications, ...) rencontrés ici et dans la suite sont supposés être différentiables, c'est-à-dire continûment différentiables le nombre de fois nécessaire si le contraire n'est pas spécifié. Un champ de directions est dit *continu* (resp. *différentiable*) si ses droites dépendent continûment (resp. différentiablement) du point d'application.

REMARQUE 3. On définit de façon analogue un champ de directions (de droites) sur un espace à n dimensions (ainsi que sur toute variété différentiable).

DÉFINITION. On appelle *courbe intégrale* d'un champ de directions une courbe qui en chacun de ses points est tangente à la direction du champ passant par ce point.

Les courbes intégrales tiennent leur nom du fait que dans certains cas on peut les déterminer par une intégration.

EXEMPLE. Supposons qu'un champ de directions continu défini sur un plan se transforme en lui-même par toutes les translations le long d'une droite qui n'est parallèle à aucune direction de ce champ (fig. 4).

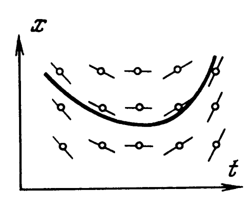


Fig. 4. Champ invariant par les translations verticales

THÉORÈME. *La détermination des courbes intégrales d'un tel champ revient exactement à l'intégration d'une fonction continue donnée.*

Démonstration. Faisons choix d'un système de coordonnées dont l'axe vertical des ordonnées est la droite donnée, et l'axe des abscisses, une droite horizontale. Toute courbe intégrale d'un champ sans directions vecticales est le graphique d'une fonction. La dérivée de cette fonction en un point est égale au coefficient directeur de la tangente au graphique en ce point. Ce graphique est une courbe intégrale si et seulement si ce coefficient directeur est égal à celui d'une droite du champ donné. Or le coefficient directeur de cette droite est une fonction donnée de l'abscisse (puisque le champ est envoyé dans lui-même par translation le long de l'axe des ordonnées). Donc la fonction qui est représentée graphiquement par une courbe intégrale admet pour dérivée la fonction donnée et par suite en est une primitive. C.Q.F.D.

Désignons les abscisses par t, les ordonnées par x. Le coefficient directeur des droites du champ est une fonction donnée $v(t)$, toute courbe intégrale est le graphique d'une fonction inconnue φ. Une courbe $x = \varphi(t)$ est une courbe intégrale si et seulement si $\frac{d\varphi}{dt} \equiv v(t)$. Le théorème de Barrow *) nous dit que $\varphi = \int v \, dt + C$.

Dans le cas général, la détermination des courbes intégrales ne se ramène pas à une intégration : même pour les champs de directions les

*) Isaac Barrow (1630-1677), maître de Newton. A consacré un livre à la réciprocité des problèmes sur les tangentes et les surfaces.

plus simples les équations des courbes intégrales ne peuvent être représentées par une combinaison finie de fonctions et d'intégrales élémentaires *).

4. Equation différentielle et solutions. Le problème géométrique de détermination des courbes intégrales s'écrit analytiquement comme celui de la détermination des solutions d'une équation différentielle. Supposons qu'un champ défini sur le plan (t, x) ne contienne pas de directions verticales (i.e. de droites parallèles à l'axe x des ordonnées (fig. 5)). Le coefficient directeur $v(t, x)$ de la droite du champ passant par un point (t, x) est alors fini et les courbes intégrales sont les représentations graphiques de fonctions $x = \varphi(t)$.

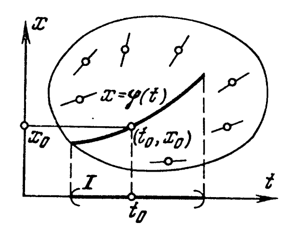


Fig. 5. Graphique d'une solution de l'équation différentielle

On admettra que les fonctions φ sont définies sur un intervalle I de l'axe t. On a de toute évidence le

THÉORÈME. *Pour que le graphique d'une fonction φ soit une courbe intégrale, il est nécessaire et suffisant que pour tout $t \in I$ l'on ait*

$$\frac{d\varphi}{dt} = v(t, \varphi(t)). \tag{1}$$

DÉFINITION 1. On dit qu'une fonction φ est une *solution* de l'équation différentielle

$$\dot{x} = v(t, x), \tag{2}$$

si elle vérifie la relation (1) (c'est-à-dire « si sa substitution à x dans l'équation (2) transforme cette dernière en identité »).

DÉFINITION 2. On dit qu'une solution φ *vérifie la condition initiale* (t_0, x_0) si $\varphi(t_0) = x_0$.

Donc une solution est une fonction définie sur un intervalle dont le graphique est une courbe intégrale ; une solution vérifie la condition initiale (t_0, x_0) si la courbe intégrale correspondante passe par le point (t_0, x_0) (fig. 5).

---

*) Exemple : le champ dont le coefficient directeur (par rapport à l'axe x) de la droite passant par (t, x) est égal à $x^2 - t$ (Liouville).

Exemple. La solution de l'équation élémentaire $\dot{x} = v(t)$ qui vérifie la condition initiale (t_0, x_0) est donnée par la *formule de Barrow* :

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Toute équation différentielle (2) définit un champ de directions sur le plan : la droite qui passe par un point (t, x) a un coefficient directeur égal à $v(t, x)$. Ce champ s'appelle *champ de directions* v ou *champ de directions de l'équation* (2).

5. Equation d'évolution dans un espace des phases à une dimension. Soit l'équation

$$\dot{x} = v(x), \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Cette équation décrit un processus d'évolution dans un espace des phases à une dimension. Le second membre définit le *champ de vitesses de phase* : en tout point x est appliqué le vecteur $v(x)$ (fig. 6 à gauche). Une telle équation dont le second membre est indépendant de t est dite *autonome.* La vitesse d'évolution d'un système autonome, c'est-à-dire un système n'interagissant pas avec d'autres, est définie par l'état seul de ce système : les lois de la nature ne dépendent pas du temps.

Les points en lesquels v s'annule s'appellent *positions d'équilibre* (ou *points stationnaires* ou encore *points singuliers*) du champ de vecteurs. Si a est une position d'équilibre, $\varphi(t) \equiv a$ est solution de l'équation (un processus commençant en a y restera pour toujours). La figure 6 représente une position d'équilibre a. On voit que cette position d'équilibre est instable : si la condition initiale s'écarte un peu de la position d'équilibre, le point représentatif s'éloigne de cette position lorsque t croît.

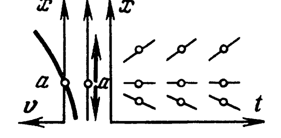


Fig. 6. Champ de vecteurs et champ de directions de l'équation $\dot{x} = v(x)$

La figure 6 représente aussi le champ de directions de l'équation envisagée. Puisque v est indépendant de t, le champ se transforme en lui-même par des translations le long de l'axe t.

D'après le théorème du point 3, les courbes intégrales de ce champ s'obtiennent par une intégration (dans la région où le champ n'est pas parallèle à l'axe t, c'est-à-dire la région qui ne contient pas de points d'équilibre, $v(x) \neq 0$). Supposons que la fonction v est continue et ne s'annule en aucun point. Ecrivons la formule explicite des courbes intégrales.

Le coefficient directeur des droites du champ est égal à $1/v(x)$. Donc, *le champ de directions de l'équation* $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = v(x)$ *est confondu avec celui de l'équation* $\mathrm{d}t/\mathrm{d}x = 1/v(x)$. Donc sont confondues les courbes intégrales de ces équations. Or les courbes intégrales de la deuxième équation sont données par la formule de Barrow qui s'écrit ici

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}\xi}{v(\xi)}. \tag{3}$$

On a ainsi prouvé le

THÉORÈME. *La solution* $x = \varphi(t)$ *de l'équation* $\dot{x} = v(x)$, *où* $v(x)$ *est une fonction continue ne s'annulant nulle part, qui vérifie la condition initiale* (t_0, x_0) *est donnée par la formule* (3). *Réciproquement, toute fonction* $x = \varphi(t)$ *définie par la formule* (3) *est une solution et vérifie la condition initiale* (t_0, x_0).

REMARQUE. Voici un procédé pour retenir la formule (3). Ecrivons l'équation initiale sous la forme $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = v(x)$. Bien qu'on ait appris en analyse que la dérivée $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = v(x)$ n'est pas une fraction mais un symbole, on manipulera ce dernier comme une fraction et on écrira l'équation sous la forme $\mathrm{d}x/v(x) = \mathrm{d}t$, en regroupant les x à gauche et les t à droite. Une intégration nous donne $t = \int \mathrm{d}x/v(x)$, c'est-à-dire la relation (3).

En réalité, ce procédé est évidemment plus qu'une règle mnémonique. Leibniz n'aurait pas introduit la notation compliquée $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ s'il n'avait eu en vue une véritable fraction : $\mathrm{d}x$ *divisé par* $\mathrm{d}t$. Le fait est que $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}t$ ne sont pas de mystérieuses quantités « infiniment petites », mais des nombres bien finis, plus exactement des fonctions de vecteur.

Considérons (fig. 7) le vecteur vitesse A d'un mouvement, dans un plan rapporté à un système de coordonnées (t, x). La vitesse de variation de la coordonnée t est une fonction de ce vecteur. C'est cette fonction de vecteur linéaire qui est désignée par $\mathrm{d}t$. Par exemple, la valeur de cette fonction sur le vecteur A de composantes (10, 20) est $\mathrm{d}t(A) = 10$. On définit de même la valeur $\mathrm{d}x(A) = 20$ qui est la vitesse de variation de la coordonnée x, de sorte que les composantes de A sont $\mathrm{d}t(A)$ et $\mathrm{d}x(A)$. On a de toute évidence la

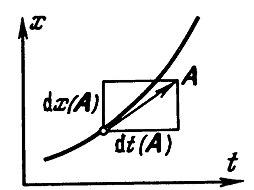


Fig. 7. Numérateur et dénominateur de la fraction $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$

PROPOSITION 1. *Pour tout vecteur A tangent au graphique d'une fonction différentiable* $x = \varphi(t)$, *le rapport* $\mathrm{d}x(A)/\mathrm{d}t(A)$ *est égal à la dérivée* $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ *de la fonction* φ *au point de tangence.*

Donc, l'équation $dx/v(x) = dt$ est une *relation entre des fonctions linéaires d'un vecteur tangent à une courbe intégrale.*

Les fonctions d'un vecteur lié qui sont linéaires lorsque le point d'application est fixe s'appellent *1-formes différentielles.*

Toute 1-forme différentielle sur le plan (t, x) peut être écrite sous la forme $\omega = a\,dt + b\,dx$, où a et b sont des fonctions définies sur le plan (t, x).

Les formes différentielles peuvent être intégrées le long de portions de courbes orientées. Choisissons sur une portion Γ d'une courbe du plan un paramètre u orientant Γ, c'est-à-dire représentons Γ sous forme de l'image dans $\mathbf{R}^2$ d'un intervalle I de l'axe u par une application différentiable $\gamma : I \to \mathbf{R}^2$ (fig. 8). L'intégrale d'une forme ω le long de Γ se définit comme le nombre

$$\int_\Gamma \omega = \int_I \omega(\gamma')du, \qquad \text{où} \qquad \gamma' = d\gamma/du.$$

En d'autres termes, une intégrale est la limite de sommes intégrales $\sum \omega(A_i)$, où $A_i = \gamma'(u_i)\Delta_i$, u_i étant les points de subdivision du segment I en segments de longueur $\Delta_i = u_{i+1} - u_i$. Le vecteur A_i est tangent à Γ et ne diffère du vecteur corde joignant deux points de subdivision consécutifs que d'un infiniment petit d'ordre supérieur à Δ_i (fig. 8).

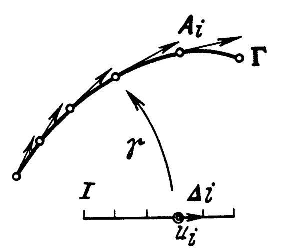


Fig. 8. Définition de l'intégrale d'une 1-forme

Le théorème relatif au changement de variable dans une intégrale définie *) entraîne la

PROPOSITION 2. *L'intégrale d'une 1-forme le long d'une portion de courbe orientée est indépendante du choix d'un paramètre compatible avec l'orientation (si l'orientation est contraire, l'intégrale change de signe).*

On a de toute évidence la

PROPOSITION 3. *L'intégrale de la 1-forme $f(x)dx$ le long d'une portion de courbe sur laquelle x peut être traité comme un paramètre est confondue avec l'intégrale définie ordinaire de la fonction f.*

Revenons à la démonstration de la formule (3).

Les formes $dx/v(x)$ et dt prennent les mêmes valeurs sur les vecteurs tangents à une courbe intégrale. Donc, leurs intégrales le long d'une portion de courbe sont égales. D'après la proposition 3 les intégrales de la première et de la deuxième forme sont respectivement égales au second et au premier membre de la formule (3).

6. Exemple : équation de reproduction normale. Supposons qu'une population biologique (par exemple des bactéries dans une boîte de Pétri ou des poissons dans un étang) compte x individus et que la vitesse de

---

*) Ce théorème a été établi par Barrow précisément lors de la résolution d'équations différentielles élémentaires appelées aujourd'hui équations à variables séparables.

reproduction est proportionnelle à x. (Cette condition est approximativement remplie tant que la nourriture est en quantité suffisante.)

Ce processus se décrit par l'*équation différentielle de reproduction normale*

$$\dot{x} = kx, \qquad k > 0.$$

D'après la logigue du problème on a $x > 0$, de sorte que le champ de directions est défini dans un demi-plan (fig. 9). On voit sur ce champ de directions que x croît avec t, mais on ne sait pas si x prendra des valeurs infinies au bout d'un temps fini (c'est-à-dire si la courbe intégrale admettra une asymptote verticale) ou si la solution restera finie pour tout t. On ne sait rien non plus ni du futur ni du passé : la courbe intégrale tendra-t-elle vers l'axe $x = 0$ lorsque t tend vers une limite négative finie ou vers l'infini ?

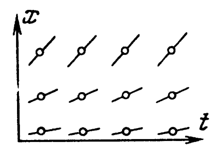


Fig. 9. Equation de reproduction $\dot{x} = kx$

Par bonheur, l'équation de reproduction se résout explicitement en vertu du théorème précédent : la formule (3) nous donne

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{k\xi}, \qquad k(t - t_0) = \ln (x/x_0), \qquad x = e^{k(t-t_0)}x_0.$$

Donc, les solutions de l'équation de reproduction normale croissent exponentiellement lorsque $t \to +\infty$ et décroissent exponentiellement lorsque $t \to -\infty$; *x ne devient ni nul ni infini au bout d'un temps t fini.* D'après l'équation de reproduction normale une population double donc durant une même période indépendamment de son nombre (pour la population du globe cette période est maintenant de l'ordre de 40 ans). Jusqu'au milieu du XX[e] siècle la science croissait aussi exponentiellement (fig. 10).

La même équation différentielle avec $k < 0$ décrit la désintégration radioactive. La quantité de matière radioactive diminue de moitié au bout d'un temps $T = k^{-1} \ln 2$, appelé *période de radioactivité* ou *vie moyenne.* La période de radioactivité de l'isotope 226 de radium est de 1620 ans, celle de l'isotope 238 d'uranium est de $4{,}5 \cdot 10^9$ ans.

Cette équation intervient dans un grand nombre de problèmes (nous verrons dans la suite que ce n'est pas le fruit du hasard, mais la manifestation de la loi de la nature en vertu de laquelle « toute » fonction est localement et approximativement linéaire).

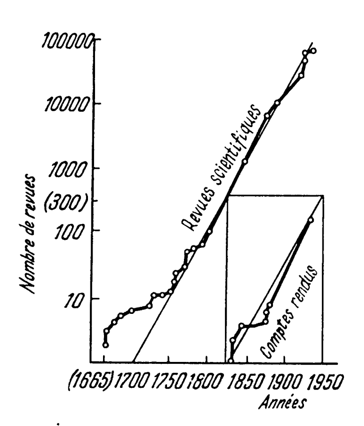


Fig. 10. Accroissement du nombre de revues scientifiques et de comptes rendus

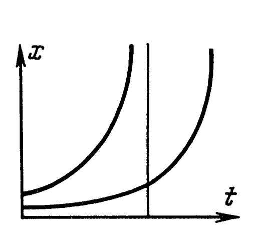


Fig. 11. Equation explosive $\dot{x} = x^2$

EXERCICE. A quelle altitude la densité de l'atmosphère est-elle deux fois moindre qu'à la surface du globe ? On admet que la température est constante et qu'un mètre cube d'air pèse 1250 g à la surface du globe.

Réponse. 8 ln 2 km ≈ 5,6 km.

7. Exemple : équation explosive. Supposons maintenant que la vitesse d'accroissement est proportionnelle non pas au nombre d'individus mais au nombre de couples :

$$\dot{x} = kx^2. \tag{4}$$

Comparé à la reproduction normale, l'accroissement est ici bien plus rapide pour les grands x et bien plus lent pour les petits x (cette situation est typique des problèmes de chimie physique, où la vitesse d'une réaction est proportionnelle aux concentrations des agents ; au demeurant les baleines de certaines espèces ont aujourd'hui tant de mal à trouver un partenaire que leur reproduction est régie par l'équation (4), qui plus est pour x petit).

Le champ de directions semble être peu différent de celui de la reproduction normale (fig. 9), mais les calculs montrent que les courbes intégrales ont un comportement fondamentalement différent. Supposons pour simplifier que $k = 1$. La formule de Barrow nous donne la solution $t = \int \frac{dx}{x^2} + C$, i.e. $x = -\frac{1}{t - C}$ pour $t < C$. Les courbes intégrales sont des demi-hyperboles (fig. 11). L'hyperbole admet une asymptote verticale.

Donc, *si l'accroissement d'une population est proportionnel au nombre de couples, cette population devient infinie en un temps fini.* Physiquement, cette conclusion s'accorde avec le caractère explosif du processus. (Certes, si t est trop proche de C, l'idéalisation adoptée pour la mise en équation

de ce processus est inacceptable, de sorte qu'une population réelle ne peut devenir infinie en un temps fini.)

Il est intéressant de noter que la deuxième moitié de l'hyperbole $x = (C - t)^{-1}$ est aussi une courbe intégrale de notre équation (si on la prolonge du demi-axe $x > 0$ à l'axe x tout entier). Les solutions correspondant à ces deux demi-hyperboles sont données par la même formule mais ne sont aucunement liées entre elles. On rétablit ce lien si l'on admet que le temps est complexe ou si l'on compactifie l'axe affine x en une droite projective (cf. chap. 5).

EXERCICE *. Quelles équations différentielles $\dot{x} = x^n$ définissent-elles sur la droite affine un champ de vitesses de phase prolongeable en un champ sans points singuliers à une droite projective ?

Réponse. $n = 0$, 1 ou 2.

8. Exemple : courbe logistique. L'équation de reproduction normale $\dot{x} = kx$ est acceptable tant que le nombre d'individus n'est pas très élevé. Lorsque ce nombre croît, la concurrence pour la nourriture conduit à une diminution de la vitesse d'accroissement. Une hypothèse élémentaire consiste à poser $k = a - bx$, c'est-à-dire à traiter k comme une fonction de x linéaire non homogène (si x n'est pas très élevé, on peut approcher toute fonction différentiable par une fonction linéaire non homogène).

Nous sommes ainsi conduits à l'*équation de reproduction en régime de concurrence* $\dot{x} = (a - bx)x$. Les coefficients a et b peuvent être rendus égaux à l'unité par un choix convenable de t et x. Nous obtenons l'équation logistique

$$\dot{x} = (1 - x)x.$$

La figure 12 représente le champ de vitesses de phase v et le champ de directions sur le plan (t, x).

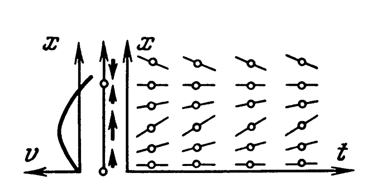


Fig. 12. Champ de vecteurs et champ de directions de l'équation $\dot{x} = (1 - x)x$

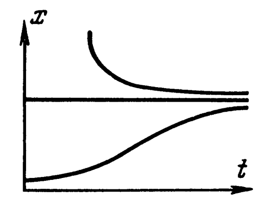


Fig. 13. Courbes intégrales de l'équation $\dot{x} = (1 - x)x$

Nous en concluons que les courbes intégrales ont la même allure que celles de la figure 13. Plus exactement, on voit que

1) le processus admet deux positions d'équilibre : $x = 0$ et $x = 1$;

2) entre les points 0 et 1 le champ est dirigé de 0 vers 1, et pour $x > 1$, vers le point 1.

Donc, la position d'équilibre 0 est instable (une fois apparue, toute

population commence à croître), et la position d'équilibre 1, stable (une petite population croît, une grande, décroît).

Quel que soit l'état initial $x > 0$, *le processus se rapproche avec le temps de la position d'équilibre stable* $x = 1$.

Ces considérations ne nous disent pas toutefois si ce rapprochement aura lieu en un espace de temps fini ou infini, c'est-à-dire si les courbes intégrales issues du domaine $0 < x < 1$ auront des points communs avec la droite $x = 1$.

On démontre que ces courbes intégrales tendent asymptotiquement vers la droite $x = 1$ lorsque $t \to +\infty$, et vers la droite $x = 0$ lorsque $t \to -\infty$. Ces courbes s'appellent *courbes logistiques*. Une courbe logistique admet donc deux asymptotes horizontales ($x = 0$ et $x = 1$) et décrit le passage de l'état 0 à l'état 1 en un laps de temps infini.

EXERCICE 1. On demande l'équation d'une courbe logistique.

Solution. La formule (3) nous donne $t = \int dx/(x(1-x)) = \ln(x/(1-x))$, ou $x = e^t/(1+e^t)$.

Cette formule prouve la propriété asymptotique d'une courbe logistique, indiquée plus haut.

EXERCICE 2. Montrer que les courbes intégrales de l'équation $\dot{x} = (1-x)x$, issues du domaine $x > 1$ tendent asymptotiquement vers la droite $x = 1$ lorsque $t \to +\infty$ et admettent des asymptotes verticales $t = \text{const.}$

Pour x petit, une courbe logistique est pratiquement indiscernable de l'exponentielle, i.e. la concurrence influe peu sur l'accroissement. Mais au fur et à mesure que x augmente, l'accroissement devient non exponentiel et au voisinage de $x = 1/2$ la courbe exponentielle s'éloigne de la logistique brusquement vers le haut ; dans la suite, l'accroissement logistique décrit la saturation du système, i.e. l'établissement d'un régime stationnaire ($x = 1$).

Jusqu'au milieu du XXe siècle, la croissance de la science était exponentielle (cf. fig. 10). Si cette croissance persistait, au XXIe siècle toute la population du globe pratiquerait la science à tel point que toutes les forêts de la planète ne suffiraient pas pour la production du papier nécessaire à la publication des articles scientifiques. Donc, l'état de saturation doit se manifester avant : nous nous trouvons à proximité de l'endroit où la courbe logistique commence à prendre du retard sur l'exponentielle. Par exemple, le nombre d'articles de mathématiques publiés dans les revues scientifiques depuis la fin de la Seconde Guerre mondiale jusqu'aux années 70 a augmenté annuellement de 7%, et d'un pourcentage moindre ces dernières années.

9. Exemple : quotas de prélèvement. Jusqu'alors nous avons envisagé une population libre évoluant suivant ses propres lois. Supposons maintenant que nous prélevons une partie de la population (disons que nous pêchons du poisson dans un étang ou dans l'océan). Supposons que la vitesse de prélèvement est constante. Nous sommes conduits à l'*équation différentielle de prélèvement*

$$\dot{x} = (1-x)x - c.$$

La quantité c caractérise la vitesse de prélèvement et s'appelle *quota*. La figure 14 représente le champ de vitesses de phase pour différentes valeurs de la vitesse c.

Nous voyons que si la vitesse c n'est pas très élevée ($0 < c < 1/4$), il existe deux positions d'équilibre (A et B sur la figure 14). La position inférieure ($x = A$) est instable. Si pour une cause ou une autre (pêche pléthorique, maladie) la population x venait à descendre au-dessous de A, elle serait condamnée à disparaître à court terme.

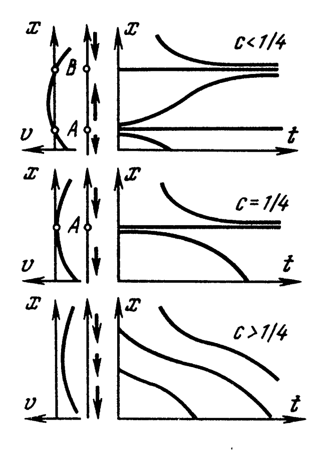


Fig. 14. Equation de prélèvement $\dot{x} = (1 - x)x - c$

La position supérieure B est stable, c'est l'état stationnaire de la population pour c constant.

Si $c > 1/4$, il n'y a point d'équilibre et la population sera épuisée au bout d'un intervalle de temps fini (à l'exemple de l'otarie de Steller).

Pour $c \leqslant 1/4$ on a une position d'équilibre instable ($A = B = 1/2$). A une telle vitesse et pour une quantité initiale suffisamment élevée, il est mathématiquement possible de puiser dans cette population aussi longtemps que l'on veut ; néanmoins une fluctuation vers le bas, si petite soit-elle, des effectifs stationnaires se traduirait par une extinction de cette population au bout d'un intervalle de temps fini.

Donc, bien que tous les quotas ($c \leqslant 1/4$) soient théoriquement permis, *le quota maximal* $c = 1/4$ *conduit à l'instabilité et est inadmissible.* Plus, *sont pratiquement à exclure les quotas proches de* $1/4$, car pour eux le seuil critique A sera proche du régime stationnaire B (de faibles écarts accidentels rejetteraient la population en-deçà du seuil A et en entraîneraient la disparition).

Il s'avère cependant que l'on peut organiser le prélèvement de telle sorte qu'il soit stable à la vitesse $1/4$ par unité de temps (il est impossible de faire mieux, car $1/4$ est la vitesse maximale de reproduction d'une population inépuisable).

10. Exemple : prélèvement à quota relatif. Au lieu de la vitesse absolue de prélèvement fixons la vitesse relative, c'est-à-dire la part de population

disponible prélevable par unité de temps : $\dot{x} = (1 - x)x - px$. Le champ de vecteurs et les courbes intégrales (pour $p < 1$) sont représentés sur la figure 15.

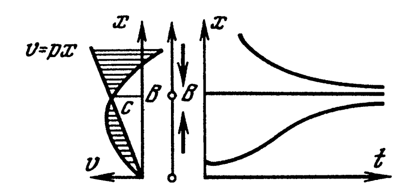


Fig. 15. Equation de prélèvement $\dot{x} = (1 - x)x - px$

La position d'équilibre instable se trouve maintenant au point $x = 0$, la deuxième position d'équilibre B est stable pour tout p, $0 < p < 1$.

La population atteint son état stationnaire $x = B$ après une certaine période de restauration. La vitesse absolue de prélèvement devient alors égale à $c = pB$. Ceci est l'ordonnée du point d'intersection des graphiques des fonctions $v = (1 - x)x$ et $v = px$ (fig. 15, à gauche). Etudions le comportement de c en fonction de p. Pour de petites quantités relatives prélevées (p petit), la vitesse de prélèvement est aussi petite ; lorsque $p \to 1$, elle tend vers 0 (épuisement de la population). La plus grande valeur de la vitesse absolue c est égale à la plus grande ordonnée du graphique de la fonction $v = (1 - x)x$. Cette valeur est atteinte lorsque la droite $v = px$ passe par le sommet de la parabole (i.e. pour $p = 1/2$) et est égale à $c = 1/4$.

Prenons $p = 1/2$ (i.e. fixons le quota relatif de telle sorte que la population stationnaire soit égale à la moitié de la population inépuisable). Nous atteignons ainsi la plus grande vitesse stationnaire $c = 1/4$, et de plus le système reste stable (il revient à l'état stationnaire lorsque la population initiale s'écarte faiblement de la population stationnaire).

11. Equations à espace des phases à plusieurs dimensions. Dans les exemples envisagés plus haut l'espace des phases était à une dimension. Dans les situations plus compliquées (par exemple lorsqu'on tient compte des rapports entre plusieurs populations) les points de l'espace des phases sont définis par plusieurs nombres (deux pour deux populations, etc.). L'équation différentielle, les solutions, etc. se définissent comme en dimension un. Rappelons ces définitions.

Soit $\boldsymbol{v}$ un champ de vecteurs sur un domaine U d'un espace des phases à n dimensions. On appelle *équation différentielle autonome définie par le champ* $\boldsymbol{v}$ l'équation

$$\dot{x} = \boldsymbol{v}(x), \quad x \in U \subset \mathbf{R}^n.$$

On appelle *solution* de cette équation une application différentiable $\varphi : I \to U$ d'un intervalle I de l'axe t dans l'espace des phases, telle que $\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t = \boldsymbol{v}(\varphi(t))$ pour tout $t \in I$.

L'image de l'application φ s'appelle *orbite* ou *trajectoire* ou parfois *courbe de phase* et le graphique *) de l'application φ, *courbe intégrale.* Les courbes intégrales sont situées dans le produit direct de l'axe t par l'espace des phases. Ce produit direct s'appelle *espace des phases élargi.* Cet espace est à $n + 1$ dimensions.

Soit (t_0, x_0) un point de l'espace des phases élargi. Une solution φ *vérifie la condition initiale* (t_0, x_0) si $\varphi(t_0) = x_0$, c'est-à-dire si la courbe intégrale passe par le point (t_0, x_0).

Les courbes intégrales peuvent être décrites, comme en dimension un, par un champ de directions dans l'espace des phases élargi. Le coefficient directeur des droites du champ est remplacé par la construction suivante.

Soit donné dans un domaine V du produit direct $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ un champ de directions dont aucune n'est verticale (n'est parallèle à $\mathbf{R}^n$). Soient t et $x = (x_1, ..., x_n)$ des coordonnées sur $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}^n$ respectivement. Alors en chaque point il existe un (et un seul) vecteur de direction, dont la coordonnée horizontale (la composante t) est égale à 1. Ce vecteur est donc de la forme $(1, \boldsymbol{v}(t, x))$, où $\boldsymbol{v}(t, x)$ est un vecteur de $\mathbf{R}^n$ dépendant d'un point de l'espace des phases élargi. En d'autres termes, un champ de directions non vertical sur l'espace des phases élargi définit un champ de vecteurs dépendant du temps dans l'espace des phases.

Chaque courbe intégrale de ce champ de directions vérifie de toute évidence l'équation différentielle

$$\dot{x} = \boldsymbol{v}(t, x),$$

i.e. est le graphique d'une application φ d'un intervalle de l'axe des temps dans l'espace des phases, telle que $d\varphi/dt = \boldsymbol{v}(t, \varphi(t))$ pour tout t. Réciproquement, le graphique de toute solution est une courbe intégrale de ce champ.

Une solution vérifie la condition initiale (t_0, x_0) si et seulement si sa courbe intégrale passe par ce point.

REMARQUE. Dans un espace des phases à n dimensions, rapporté à un système de coordonnées, un champ de vecteurs se définit par n fonctions de n variables. Notre équation différentielle prend donc la forme d'un « système de n équations du premier ordre » :

$$\dot{x}_1 = v_1(t\,;\, x_1, ..., x_n), ..., \dot{x}_n = v_n(t\,;\, x_1, ..., x_n).$$

Toute solution est définie par une fonction vectorielle $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ de t, telle que $d\varphi_k/dt = v_k(t\,;\, \varphi_1(t), ..., \varphi_n(t))$, $k = 1, ..., n$, pour tout t. Toute condition initiale est donnée par $n + 1$ nombres $(t_0\,;\, x_{1,0}, ..., x_{n,0})$.

---

*) On appelle *graphique* de l'application $f : X \to Y$ le sous-ensemble du produit direct $X \times Y$ composé de tous les couples $(x, f(x))$, où $x \in X$; le *produit direct* $X \times Y$ est l'ensemble des couples (x, y), où $x \in X$, $y \in Y$.

12. Exemple : équation différentielle du système prédateur-proie. Le modèle le plus élémentaire décrivant la lutte de deux espèces, l'une dévorant l'autre, est le suivant. Considérons un étang peuplé de carassins et de brochets. Sans brochets, les carassins se reproduiraient exponentiellement à la vitesse $\dot{x} = kx$ proportionnelle à leur quantité x (nous admettons que la masse totale des carassins est de beaucoup inférieure à celle de l'étang). Si y est le nombre de brochets, il faut tenir compte des carassins dévorés par les brochets. Nous supposons que le nombre de rencontres des carassins et des brochets est proportionnel aussi bien au nombre des uns que des autres ; la vitesse de variation du nombre de carassins est alors régie par l'équation $\dot{x} = kx - axy$.

S'agissant des brochets, sans carassins ils sont condamnés à disparaître, i.e. $\dot{y} = -ly$; en présence de carassins, ils commencent à se reproduire à une vitesse proportionnelle au nombre de carassins dévorés, i.e. $\dot{y} = -ly + bxy$.

Nous sommes ainsi conduits au système d'équations différentielles d'un modèle élémentaire prédateur-proie :

$$\begin{cases} \dot{x} = \quad kx - axy, \\ \dot{y} = -ly + bxy. \end{cases}$$

Ce modèle s'appelle *modèle de Lotka-Volterra* du nom de ses auteurs. Le second membre définit un champ de vecteurs sur le plan : le vecteur appliqué en (x, y) a pour composantes $(kx - axy, \ -ly + bxy)$. C'est le champ de vitesses de phase.

L'espace des phases est l'angle défini par les droites $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$.

On construit sans peine le champ de vitesses de phase en étudiant les changements de signe des composantes (fig. 16). Le point singulier $x_0 = l/b$, $y_0 = k/a$ correspond à la moyenne des carassins et des brochets, lorsque l'accroissement des carassins est compensé par l'activité des brochets, et l'accroissement des brochets, par leur mortalité naturelle.

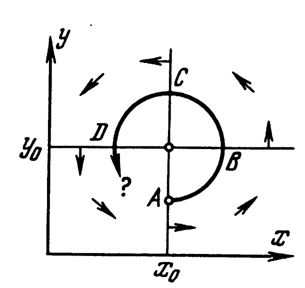


Fig. 16. Champ de vitesses de phase du modèle prédateur-proie

Si le nombre initial de brochets est inférieur à y_0 (le point A sur la figure), le nombre de carassins et de brochets augmente, tant que les bro-

chets qui n'ont cessé de se reproduire ne commencent à dévorer plus de carassins que l'accroissement de ces derniers (le point B). Ensuite le nombre de carassins commence à diminuer et le nombre de brochets à croître tant que la pénurie de nourriture ne conduise à l'extinction des brochets (le point C) ; le nombre de brochets diminuera tellement que les carassins commenceront à se reproduire (point D) ; la reprise de la reproduction des carassins entraînera celle des brochets. Nous assistons donc à des fluctuations de la population des carassins et des brochets autour de leurs moyennes respectives.

Reste à savoir si ces fluctuations sont périodiques ou non. Notre représentation approximative du champ de vitesses de phase ne permet pas de répondre à cette question. On peut imaginer des cas différents, par exemple ceux de la figure 17.

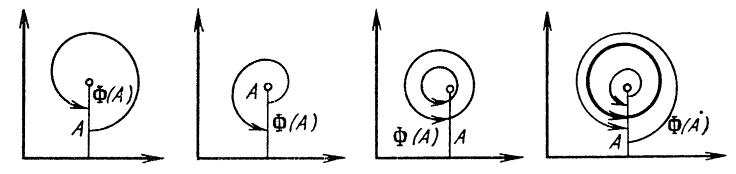


Fig. 17. Application de Poincaré

Pour comprendre ces cas, considérons le segment reliant le point singulier à l'axe x. Chaque point A de ce segment (non situé sur l'axe x) définit une orbite qui coupe ce segment en un point $\Phi(A)$. La fonction Φ s'appelle *application de Poincaré* ou *monodromie* ou encore *holonomie.*

Considérons le graphique de l'application de Poincaré. Il s'appelle *diagramme de Lamerey.* Les diagrammes de Lamerey correspondant aux quatre cas de la figure 17 sont représentés sur la figure 18.

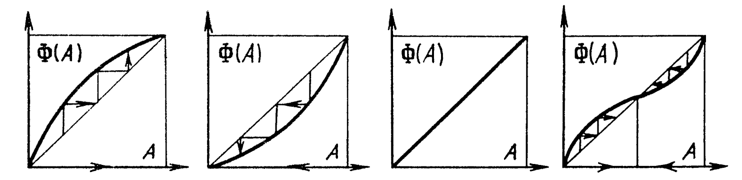


Fig. 18. Diagrammes de Lamerey

Le diagramme de Lamerey permet de construire facilement la séquence des images du point A par l'application Φ. Il suffit à cet effet de construire l'*escalier de Lamerey* (fig. 19) dont les abscisses et les ordonnées des sommets sont les points A, $\Phi(A)$, $\Phi^2(A) = \Phi(\Phi(A))$, ...

Les points d'intersection du graphique de l'application de Poincaré avec la diagonale (le graphique $\Phi \equiv A$) correspondent à des orbites fermées (des *cycles*) sur le plan de phase.

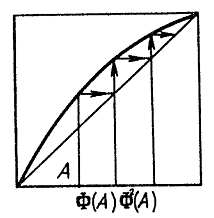


Fig. 19. Escalier de Lamerey

Un cycle est visiblement stable (resp. instable) si au point respectif A on a $\Phi'(A) < 1$ (resp. $\Phi'(A) > 1$). Dans les quatre diagrammes de la figure 18, les orbites sont, dans le premier cas, des spirales s'enroulant autour du point singulier, dans le deuxième cas, des spirales se déroulant autour du point singulier, dans le troisième cas, des orbites fermées, dans le quatrième cas, des orbites s'enroulant sur un cycle stable de l'intérieur et de l'extérieur.

Respectivement, dans le premier cas, la population de l'étang deviendra stationnaire à la longue, les fluctuations seront amorties. Dans le deuxième cas, l'état d'équilibre n'est pas stable, les fluctuations s'amplifient. A une certaine date, le nombre de carassins (de brochets) sera <1 ; notre modèle sera alors inacceptable et *la population de l'étang s'éteindra.*

Dans le troisième cas, on aura des fluctuations périodiques de la population de carassins et de brochets autour de l'état d'équilibre ; l'amplitude de ces fluctuations est définie par les conditions initiales.

Dans le quatrième cas, on observera aussi des fluctuations périodiques, mais *leur amplitude ne dépendra pas des conditions initiales* : toute orbite s'enroule sur le cycle limite. Dans ce cas on dit que le système est *auto-excité.*

Lequel de ces cas correspond au système de Lotka-Volterra ? La question reste ouverte jusqu'au § 2.

13. Exemple : particule libre sur la droite. D'après la « première loi » de Newton, l'accélération d'un point matériel non soumis à l'action de forces extérieures est égale à 0 : $\ddot{x} = 0$. Si le point x appartient à la droite **R**, on parle du *mouvement d'une particule libre sur la droite* (on pourrait s'imaginer une perle enfilée sur une aiguille à tricoter).

L'espace des phases est à deux dimensions, puisque tout le mouvement est défini par la position initiale et la vitesse initiale. Sur le plan de phases rapporté aux coordonnées $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ est défini le champ de vitesses de phase

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = 0,$$

donc les composantes de ce champ sont $(x_2, 0)$ (fig. 20).

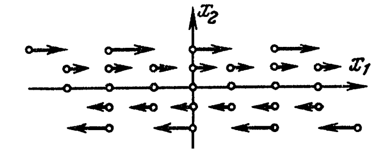


Fig. 20. Champ de vitesses de phase d'une particule libre

Tous les points de l'axe x_1 sont des positions d'équilibre. De tels équilibres s'appellent *indifférents* en physique et *instables* en mathématique (un changement convenable si petit soit-il du point initial entraîne au bout d'un intervalle de temps relativement grand un changement d'état non petit).

Les orbites sont les droites horizontales x_2 = const et tous les points de l'axe x_1.

EXERCICE. Trouver la solution vérifiant la condition initiale (a, b) pour $t_0 = 0$.
Réponse. $\varphi_1(t) = a + bt$, $\varphi_2(t) = b$.

14. Exemple : chute libre. Suivant Galilée, l'accélération g des corps tombant en chute libre au voisinage du sol est constante. Si x est la hauteur, $\ddot{x} = -g$. En rapportant le plan de phases aux mêmes coordonnées que dans l'exemple précédent, on obtient le système

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -g.$$

Le champ de vecteurs défini par le second membre est représenté sur la figure 21.

EXERCICE. Montrer que les orbites sont des paraboles.

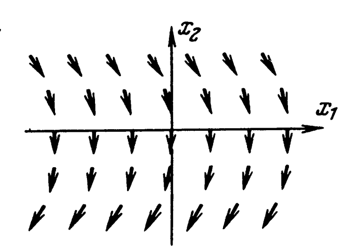


Fig. 21. Champ de vitesses de phase d'une particule en chute libre

15. Exemple : petites oscillations. Dans de nombreux cas, la force qui ramène le système à l'état d'équilibre est plus ou moins proportionnelle à l'écart par rapport à la position d'équilibre (loi de Hooke, etc. ; le fait est que la force est nulle dans la position d'équilibre et toute fonction est localement approximativement linéaire). Nous sommes conduits à l'*équation des petites oscillations*

$$\ddot{x} = -kx.$$

Le coefficient $k > 0$ peut être rendu égal à 1 par un choix convenable de l'échelle des temps. L'équation devient

$$\ddot{x} = -x.$$

En rapportant le plan de phases aux coordonnées $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, on peut mettre cette équation sous forme du système

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1.$$

Le second membre définit un champ de vecteurs sur le plan de phases. Ce champ est représenté sur la figure 22.

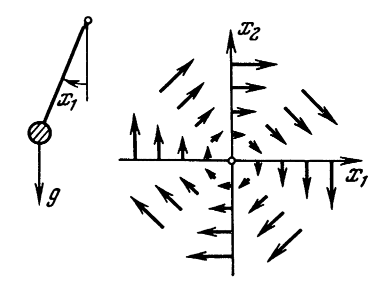


Fig. 22. Champ de vitesses de phase des faibles oscillations

EXERCICE 1. Montrer que les orbites sont des cercles et leur centre.

Solution. Le vecteur vitesse de phase est orthogonal au rayon vecteur.

EXERCICE 2. Montrer que le point représentatif se déplace sur un cercle à une vitesse angulaire constante égale à 1.

Solution. Le vecteur vitesse de phase est de même longueur que le rayon vecteur.

EXERCICE 3. Trouver la solution qui vérifie la condition initiale $x(0) = a$, $\dot{x}(0) = b$.

Solution. D'après les deux exercices précédents, il faut faire tourner le vecteur de la condition initiale d'un angle t. On obtient

$$x_1(t) = a \cos t + b \sin t, \quad x_2(t) = -a \sin t + b \cos t.$$

REMARQUE. Nous avons ainsi montré que x effectue des oscillations harmoniques et établi la « loi de la conservation de l'énergie » : la quantité $x_1^2/2 + x_2^2/2$ est constante sur une orbite.

EXERCICE 4. Etablir la loi de la conservation de l'énergie $x_2^2/2 + kx_1^2/2$ pour le système $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -kx_1$.

REMARQUE. La quantité $x_2^2/2$ s'appelle *énergie cinétique*, la quantité $kx_1^2/2$, *énergie potentielle.*

EXERCICE 5. Montrer que pour $k = 1$ les courbes intégrales de ce système sont des hélices.

16. Exemple : pendule mathématique. Considérons une tige impondérable de longueur l, suspendue par une extrémité et portant à son autre extrémité un point pesant de masse m. Désignons par θ l'angle d'écart par rapport à la verticale. D'après les lois de la mécanique, l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$ du pendule est proportionnelle au moment de son poids (fig. 23) :

$$I\ddot{\theta} = -mgl \sin \theta,$$

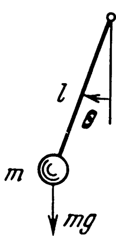


Fig. 23. Pendule mathématique

où $I = ml^2$ est le moment d'inertie (le signe moins s'explique par le fait que le moment tend à réduire l'écart).

L'équation du mouvement du pendule est donc $\ddot{\theta} = -k \sin \theta$, $k = g/l$. Le coefficient k peut être rendu égal à 1 par un choix convenable de l'échelle des temps. L'équation devient alors $\ddot{\theta} = -\sin \theta$.

L'espace des phases est à deux dimensions. Pour coordonnées on peut prendre l'angle d'écart $x_1 = \theta$ et la vitesse angulaire $x_2 = \dot{\theta}$. L'équation prend la forme du système

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\sin x_1.$$

Le second membre définit le champ de vitesses de phase. Il est représenté sur la figure 24.

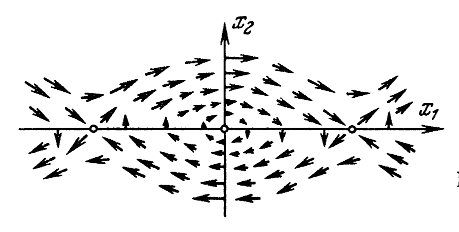


Fig. 24. Champ de vitesses de phase du pendule

EXERCICE. Montrer que l'origine des coordonnées ($x_1 = x_2 = 0$) et le point ($x_1 = \pi$, $x_2 = 0$) sont des orbites.

Les autres orbites seront étudiées dans le menu au § 12.

REMARQUE. Si l'angle d'écart θ est petit, $\sin \theta \approx \theta$. Ce changement ramène l'équation du pendule à celle des petites oscillations (pt. 15). La question de savoir jusqu'à quel point les conclusions tirées de l'étude de cette équation élémentaire se généralisent à l'équation complète du pendule fera l'objet d'un examen spécial au § 12.

17. Exemple : pendule renversé. Etudions le comportement d'un pendule renversé. Dans ce cas l'angle θ est voisin de π, il est donc naturel de considérer l'angle d'écart $\psi = \theta - \pi$ par rapport à la position d'équilibre supérieure. On a alors $\ddot{\psi} = \sin \psi$ et pour de petits ψ, l'équation approchée

$$\ddot{\psi} = \psi.$$

Cette équation s'appelle *équation des « petites oscillations »* du pendule renversé. L'espace des phases est à deux dimensions. En prenant pour coordonnées $x_1 = \psi$ et $x_2 = \dot{\psi}$, on obtient le système

$$\dot{x}_1 = x_2, \qquad \dot{x}_2 = x_1.$$

Le champ de vitesses de phase est représenté sur la figure 25. Ses orbites seront étudiées en détail au § 2.

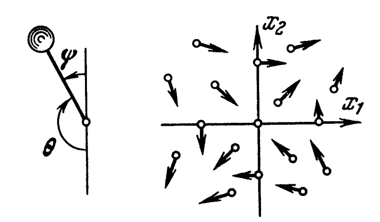


Fig. 25. Champ de vitesses de phase du pendule renversé

18. Exemple : petites oscillations du pendule sphérique. L'écart par rapport à la verticale est caractérisé par deux nombres : x et y.

Du cours de mécanique on sait que les équations des petites oscillations s'écrivent

$$\ddot{x} = -x, \quad \ddot{y} = -y.$$

L'espace des phases est à quatre dimensions. Prenons pour coordonnées $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, $x_3 = y$ et $x_4 = \dot{y}$. Les équations prennent la forme

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1, \quad \dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = -x_3.$$

Le second membre définit un champ de vecteurs sur $\mathbf{R}^4$.

EXERCICE 1. Montrer que les orbites de ce champ sont situées sur des sphères à trois dimensions $x_1^2 + \ldots + x_4^2 = \text{const}$.

EXERCICE 2. Montrer que les orbites sont de grands cercles de ces sphères.

Mais tout grand cercle n'est pas une orbite.

EXERCICE * 3. Montrer que toutes les orbites forment une sphère à deux dimensions sur chaque sphère à trois dimensions.

On peut se représenter une sphère S^3 à trois dimensions comme l'espace $\mathbf{R}^3$ complété d'un point « infiniment éloigné ». Donc la partition de S^3 en cercles induit une partition de $\mathbf{R}^3$ en cercles et en une courbe non fermée (« dont les deux extrémités s'éloignent à l'infini »). Cette partition est représentée sur la figure 26.

EXERCICE * 4. Vérifier que deux cercles quelconques de cette partition sont enlacés avec un coefficient d'enlacement égal à 1 (le coefficient d'enlacement indique le nombre de fois qu'une courbe coupe une membrane tendue sur l'autre, les points d'intersection étant affectés de signes).

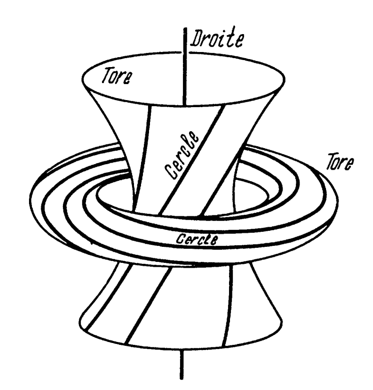


Fig. 26. Orbites du pendule sphérique sur une hypersurface d'énergie constante

§ 2. Champ de vecteurs sur la droite

Dans ce paragraphe on étudie une équation différentielle définie par un champ de vecteurs sur la droite, et les équations à variables séparables se ramenant à cette équation.

1. Existence et unicité des solutions. Soit v une fonction (continûment) différentiable définie sur un intervalle U de la droite réelle.

THÉORÈME. *La solution φ de l'équation $\dot{x} = v(x)$, qui vérifie la condition initiale (t_0, x_0)*

1) *existe quels que soient $t_0 \in \mathbf{R}$, $x_0 \in U$;*

2) *est unique en ce sens que deux solutions vérifiant la même condition initiale sont confondues dans un voisinage du point t_0 ;*

3) *est donnée par la formule de Barrow :*

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{\varphi(t)} \frac{d\xi}{v(\xi)} \quad si \quad v(x_0) \neq 0,$$

$$\varphi(t) \equiv x_0 \quad si \quad v(x_0) = 0.$$

Démonstration. Supposons que x_0 n'est pas un point d'équilibre. Au § 1 nous avons vu que : 1) la solution est donnée au voisinage du point t_0 par la formule de Barrow, 2) la fonction φ définie par cette formule est une solution vérifiant cette condition initiale.

Si x_0 est un point d'équilibre, la fonction $\varphi(t) \equiv x_0$ est aussi visiblement une solution. C.Q.F.D.

EXERCICE. Indiquer la lacune de cette démonstration.

2. Contre-exemple. Soit $v = x^{2/3}$ (fig. 27). Deux solutions $\varphi_1 = 0$ et $\varphi_2 = (t/3)^3$ vérifient la même condition initiale (0, 0) en dépit de l'unicité.

La fonction v n'est certes pas différentiable, donc cet exemple n'infirme pas le théorème. Mais la démonstration produite n'a pas fait intervenir la

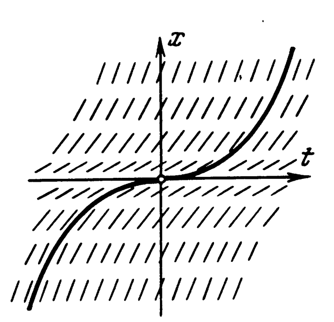


Fig. 27. Exemple de non-unicité

différentiabilité de v : elle passe dans le cas aussi où v n'est que continue. Donc, elle ne peut pas être vraie. En effet, l'unicité a été établie à la seule condition que $v(x_0) \neq 0$. Nous voyons que si le champ v est seulement continu (et pas différentiable), l'unicité des solutions vérifiant une condition initiale placée en la position d'équilibre peut ne pas avoir lieu. Il s'avère que *la différentiabilité de v assure l'unicité dans ce cas aussi* (cf. pt. 3 plus bas).

Cet exemple peut encore être décrit de la manière suivante : en se déplaçant à la vitesse $v(x) = x^{2/3}$, le point représentatif peut atteindre la position d'équilibre ($x = 0$) au bout d'un intervalle de temps fini à partir d'un autre point.

Au § 1 nous avons étudié un mouvement dans un champ linéaire (avec une vitesse $v(x) = kx$). Dans ce cas, le point représentatif accède à la position d'équilibre au bout d'un intervalle de temps infini (si par exemple $v(x) = -x$, le point représentatif se rapproche de la position d'équilibre si lentement qu'à tout instant il lui resterait, pour atteindre cette position, un temps égal à 1 si sa vitesse cessait de varier à cet instant).

La cause de la non-unicité dans le cas où $v(x) = x^{2/3}$ réside dans le fait que la vitesse ne décroît pas assez vite à l'approche de la position d'équilibre. Pour cette raison, la solution réussit à atteindre le point singulier en un temps fini.

3. Démonstration de l'unicité. Supposons que φ est solution de l'équation $\dot{x} = v(x)$, où $v(x)$ est une fonction différentiable. Supposons que $\varphi(t_0) = x_0$ est une position d'équilibre et que $\varphi(t_1) = x_1$ n'en est pas une (fig. 28). Considérons sur l'intervalle $[t_0, t_1]$ le point t_2 le plus proche de t_1, tel que $v(\varphi(t_2)) = 0$. Pour tout point t_3 compris entre t_2 et t_1, on a en vertu de la formule de Barrow :

$$t_3 - t_1 = \int_{x_1}^{x_3} \frac{d\xi}{v(\xi)}, \quad x_3 = \varphi(t_3).$$

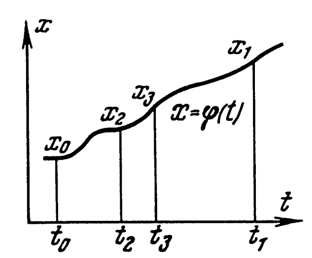


Fig. 28. Démonstration de l'unicité

Si la fonction v est différentiable, l'intégrale tend vers l'infini lorsque x_3 tend vers x_2. En effet, le coefficient directeur d'une corde du graphique d'une fonction différentiable sur un segment est borné (fig. 29), donc $|v(\xi)| \leqslant k|\xi - x_2|$, où la constante k est indépendante du point ξ de $[x_1, x_2]$ (la condition de limitation du coefficient directeur d'une corde du graphique s'appelle *condition de Lipschitz*, le nombre k, *rapport de Lipschitz*). Ainsi

$$|t_3 - t_1| \geqslant \left| \int_{x_1}^{x_3} \frac{d\xi}{k(\xi - x_2)} \right|.$$

La dernière intégrale est facile à calculer, elle tend vers l'infini lorsque x_3 tend vers x_2. On peut s'en assurer aisément sans passer au calcul : en effet, cette intégrale est égale au temps mis pour joindre deux points d'un champ linéaire, or ce temps tend vers l'infini lorsque l'un des points tend vers la position d'équilibre.

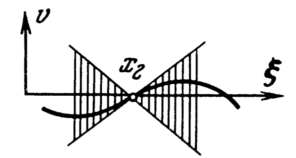


Fig. 29. Condition de Lipschitz

Ainsi le nombre $|t_2 - t_1|$ est supérieur à tout nombre donné *a priori.* Or il n'existe pas de nombre supérieur à tout nombre donné à l'avance. Donc, la solution qui vérifie la condition initiale placée en une position d'équilibre ne peut pas prendre de valeurs qui ne sont pas des positions d'équilibre. Donc si $\varphi(t_0)$ est une position d'équilibre, $v(\varphi(t)) \equiv 0$ pour tout t. Par suite, $\dot{\varphi} \equiv 0$, c'est-à-dire que φ est une constante. C.Q.F.D.

Remarquons que l'idée maîtresse de cette démonstration est la comparaison d'un mouvement dans un champ différentiable v à un mouvement plus rapide dans un champ linéaire convenable. Le temps mis par le dernier mouvement pour atteindre la position d'équilibre est infini, donc il le sera *a fortiori* pour un mouvement plus lent dans le champ initial.

EXERCICE 1. Les courbes intégrales de l'équation $\dot{x} = v(x)$ à second membre $v(x)$ différentiable peuvent-elles se rapprocher plus vite qu'exponentiellement lorsque $t \to \infty$?

Réponse. Non, si l'une d'elles correspond à la position d'équilibre ; oui, sinon.

EXERCICE 2. Le théorème d'unicité est-il vrai dans le cas où la fonction v admet une dérivée discontinue ?

Réponse. Oui.

EXERCICE 3. Montrer qu'une condition suffisante d'unicité de la solution vérifiant la condition initiale x_0 est la divergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{v(\xi)}$ en x_0.

EXERCICE 4. Montrer qu'une condition suffisante d'unicité est que la fonction v vérifie la condition de Lipschitz $|v(x) - v(y)| \leqslant k|x - y|$ quels que soient x et y.

EXERCICE 5. Etablir l'unicité de la solution de l'équation $\dot{x} = v(t, x)$, où v est une fonction différentiable, qui vérifie la condition initiale $\varphi(t_0) = x_0$.

Nota. Par la substitution de $x - \varphi(t)$ à x ramener la solution à la solution triviale, puis comparer le champ de directions à un champ linéaire convenable. Cette comparaison prouve l'unicité quelle que soit la dimension de l'espace des phases.

EXERCICE 6. Montrer que les orbites du système prédateur-proie (§ 1, pt. 12) ne coupent pas les axes de coordonnées (par exemple, un nombre initialement positif de carassins ne peut devenir négatif à la longue).

EXERCICE 7. Montrer que deux solutions quelconques de l'équation $\dot{x} = v(x)$, où $v(x)$ est différentiable, vérifiant la même condition initiale sont confondues partout où elles sont définies.

4. Produits directs. Soient les équations différentielles :

$$\dot{x}_1 = v_1(x_1), \quad x_1 \in U_1 ; \tag{1}$$

$$\dot{x}_2 = v_2(x_2), \quad x_2 \in U_2. \tag{2}$$

On appelle *produit direct* de ces équations le système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = v_1(x_1), \\ \dot{x}_2 = v_2(x_2), \end{cases} \tag{3}$$

dont l'espace des phases est le produit direct U des espaces des phases des équations (1) et (2). La définition implique immédiatement le

THÉORÈME. *Toute solution φ de l'équation différentielle* (3), *produit direct des équations* (1) *et* (2), *est une application $\varphi : I \to U$ de la forme $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$, où φ_1 et φ_2 sont des solutions des équations* (1) *et* (2), *définies sur le même intervalle.*

Supposons en particulier que les espaces des phases U_1 et U_2 sont à une dimension. Nous savons résoudre alors chacune des équations (1) et (2). Nous pouvons donc intégrer explicitement le système d'équations différentielles (3).

Plus exactement, d'après le théorème du pt. 5, § 1, la solution φ qui vérifie la condition initiale $\varphi(t_0) = x_0$ peut être tirée, au voisinage du point $t = t_0$, des relations

$$\int_{x_{1,0}}^{\varphi_1(t)} \frac{d\xi}{v_1(\xi)} = t - t_0 = \int_{x_{2,0}}^{\varphi_2(t)} \frac{d\xi}{v_2(\xi)} \quad (x_0 = (x_{1,0}, x_{2,0})),$$

si $v_1(x_{1,0}) \neq 0 \neq v_2(x_{2,0})$.

Si $v_1(x_{1,0}) = 0$, la première relation est remplacée par $\varphi_1 \equiv x_{1,0}$; si $v_2(x_{2,0}) = 0$, la deuxième relation est remplacée par $\varphi_2 = x_{2,0}$. Enfin si $v_1(x_{1,0}) = v_2(x_{2,0}) = 0$, le point x_0 est un point singulier du champ de vecteurs v et la position d'équilibre du système (3) est $\varphi(t) \equiv x_0$.

5. Exemples de produits directs. Soit le système de deux équations

$$\dot{x}_1 = x_1, \quad \dot{x}_2 = kx_2.$$

EXERCICE 1. Tracer les champs de vecteurs correspondants sur le plan pour $k = 0, \pm 1, 1/2, 2$.

Nous avons déjà résolu chacune de ces équations séparément. La solution φ qui vérifie la condition initiale $\varphi(t_0) = x_0$ s'écrit

$$\varphi_1 = x_{1,0}e^{(t-t_0)}, \quad \varphi_2 = x_{2,0}e^{k(t-t_0)}. \tag{4}$$

Donc, le long de toute orbite $x = \varphi(t)$, on a soit

$$|x_2| = C|x_1|^k, \tag{5}$$

où C est une constante indépendante de t, soit $x_1 \equiv 0$.

EXERCICE 2. Est-ce que la courbe définie sur le plan de phase (x_1, x_2) par l'équation (5) est une orbite ?

Réponse. Non.

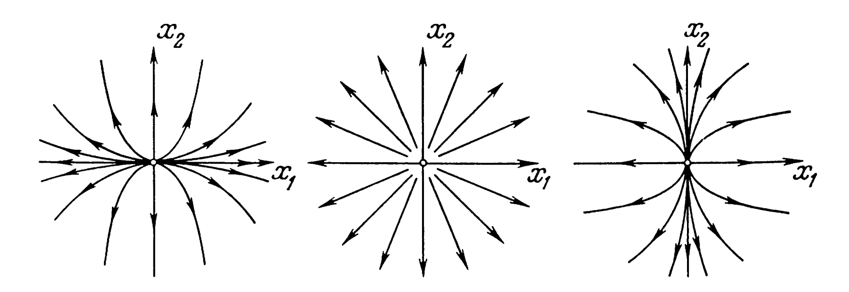


Fig. 30. Nœuds : orbites des systèmes $\dot{x}_1 = x_1$, $\dot{x}_2 = kx_2$ pour $k > 1$, $k = 1$ et $0 < k < 1$

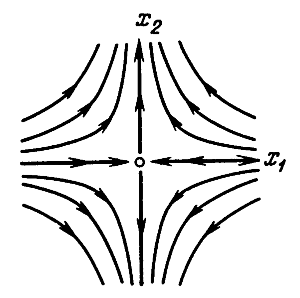


Fig. 31. Col : orbites du système $\dot{x}_1 = x_1$, $\dot{x}_2 = kx_2$, $k < 0$

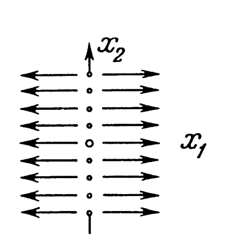


Fig. 32. Orbites du système $\dot{x}_1 = x_1$, $\dot{x}_2 = 0$

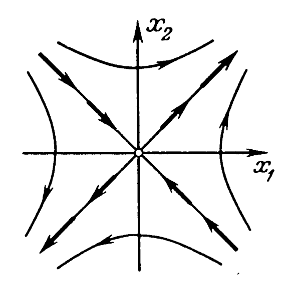


Fig. 33. Orbites du pendule renversé

La forme des courbes (5), où $C \in \mathbf{R}$, diffère en fonction de la valeur du paramètre k. Si $k > 0$, c'est une famille de « paraboles *) d'indice k ». Ces paraboles sont tangentes à l'axe x_1 si $k > 1$, ou à l'axe x_2 si $k < 1$ (fig. 30 ; pour $k = 1$ on obtient une famille de droites passant par l'origine des coordonnées). Les orbites de la figure 30 constituent un *nœud*. Lorsque $k < 0$, les courbes (5) prennent la forme d'hyperboles (fig. 31) **) et constituent un *col* au voisinage de l'origine des coordonnées. Pour $k = 0$, les courbes (5) se transforment en droites parallèles (fig. 32).

Un regard sur les formules (4) nous permet de constater que chaque orbite est entièrement contenue dans un quadrant (ou est située sur un demi-axe de coordonnées, ou encore coïncide avec l'origine des coordonnées qui, elle, est une orbite quel que soit k). Les flèches tracées sur les figures indiquent dans quel sens se déplace le point $\varphi(t)$ lorsque t croît.

EXERCICE 3. Montrer que chacune des paraboles $x_2 = x_1^2 (k = 2)$ est formée de trois orbites. Décrire toutes les orbites pour d'autres valeurs de k ($k > 1$, $k = 1$, $0 < k < 1$, $k = 0$, $k < 0$).

Il est intéressant d'observer comment une figure se transforme en une autre lorsque k varie continûment.

EXERCICE 4. Représenter le nœud correspondant à $k = 0{,}01$ et le col correspondant à $k = -0{,}01$.

EXERCICE 5. Intégrer l'équation du pendule renversé $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = x_1$ et tracer les orbites.

Solution. Rapportons le plan de phases aux coordonnées $X = x_1 + x_2$, $Y = x_1 - x_2$. Le système se décompose en produit direct : $\dot{X} = X$, $\dot{Y} = -Y$. Sur le plan (X, Y) les orbites forment un col comme sur la figure 31. Donc, on obtient aussi un col sur le plan (x_1, x_2) (fig. 33). On en déduit en particulier que *pour un écart donné du pendule par rapport à la verticale, il existe une vitesse initiale et une seule pour laquelle il se rapproche asymptotiquement de la position d'équilibre supérieure lorsque $t \to +\infty$* (l'orbite correspondante est une demi-droite issue de 0). Si la vitesse initiale est plus petite ou plus grande, le pendule tombe soit sans atteindre la position d'équilibre supérieure, soit après l'avoir dépassé (les orbites correspondantes sont des demi-hyperboles).

Les solutions sont de la forme $X = X_0 e^t$, $Y = Y_0 e^{-t}$, d'où $x_1 = Ae^t + Be^{-t} = a \operatorname{ch} t + b \operatorname{sh} t$, $x_2 = Ae^t - Be^{-t} = a \operatorname{sh} t + b \operatorname{ch} t$.

6. Equations à variables séparables.

DÉFINITION. On appelle *équation à variables séparables* une équation de la forme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(y)}{g(x)}. \tag{6}$$

On admettra que f et g sont des fonctions différentiables ne s'annulant pas dans le domaine envisagé.

*) On obtient de véritables paraboles seulement pour $k = 2$ et $k = 1/2$.

**) On obtient de véritables hyperboles seulement pour $k = -1$.

Parallèlement à cette équation considérons le système

$$\dot{x} = g(x), \quad \dot{y} = f(y). \tag{7}$$

THÉORÈME 1. *Les orbites du système* (7) *sont les courbes intégrales de l'équation* (6) *et réciproquement, les courbes intégrales de l'équation* (6) *sont les orbites du système* (7).

Démonstration. Le coefficient directeur du vecteur vitesse de phase est égal à $f(y)/g(x)$. Donc, toute orbite du système est tangente en chacun de ses points au champ de directions de l'équation.

Réciproquement, soit donnée une courbe intégrale de l'équation (6). On peut alors choisir un paramètre t de telle sorte que l'équation paramétrique de cette courbe soit $x = \varphi(t)$, $Y = \psi(t)$, la fonction φ étant solution de l'équation $\dot{x} = g(x)$ (on se sert de la condition $g \neq 0$). La deuxième coordonnée ψ du point de paramètre t vérifie alors la relation $(\mathrm{d}\psi/\mathrm{d}t)/(\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t) = f(\psi(t))/g(\varphi(t))$, i.e. est solution de l'équation $\dot{y} = f(y)$. Donc cette courbe intégrale est une orbite du système.

THÉORÈME 2. *L'équation* (6) *admet une solution et une seule* *) *vérifiant la condition initiale* (x_0, y_0), *et définie par la formule*

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}\xi}{g(\xi)} = \int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}\eta}{f(\eta)}.$$

Démonstration. Cette assertion résulte du théorème précédent et des formules donnant les solutions des équations $\dot{x} = g(x)$ et $\dot{y} = f(y)$, qui vérifient respectivement les conditions initiales (t_0, x_0) et (t_0, y_0).

REMARQUE. Un procédé « mnémonique » de résolution d'une équation à variables séparables consiste à traiter le premier et le second membre de l'équation comme des fractions et à porter « tous les termes en x dans un membre et tous les termes en y dans l'autre » :

$$\frac{\mathrm{d}x}{g(x)} = \frac{\mathrm{d}y}{f(y)}. \tag{8}$$

L'« égalité des intégrales » nous donne ensuite la relation cherchée entre x et y sous forme de l'égalité des primitives $\int \frac{\mathrm{d}x}{g(x)} = \int \frac{\mathrm{d}y}{f(y)} + C$ ou des intégrales définies indiquées dans le théorème.

*) En ce sens que deux solutions vérifiant la même condition initiale sont confondues là où elles sont définies.

Il va de soi que cette règle « mnémonique », si elle est correctement comprise, est une démonstration assez rigoureuse de la formule donnant la solution. En effet, la relation (8) exprime que *les deux formes différentielles prennent la même valeur sur tout vecteur tangent à une courbe intégrale de l'équation* (6) (et réciproquement, une courbe dont tous les vecteurs tangents vérifient la relation (8) est une courbe intégrale de l'équation (6)).

Les intégrales des formes du premier et du second membre de l'équation (8), étendues à une même portion de courbe intégrale de l'équation (6) sont égales (puisque dans la définition d'une intégrale le long d'une courbe n'interviennent que les valeurs des formes sur les vecteurs tangents à cette courbe et que ces formes sont égales sur ces vecteurs). Enfin l'intégrale de la forme $dx/g(x)$ le long d'une portion de courbe est égale à une intégrale ordinaire de la fonction $1/g$ le long de la projetée de cette portion sur l'axe x ; *idem* pour la forme $dy/f(y)$.

La formule (8) est appelée parfois *forme symétrique* d'écriture de l'équation (6).

EXERCICE 1. Tracer les courbes intégrales des équations $dy/dx = y/x,\ x/y,\ -y/x,\ -x/y$.

EXERCICE 2. Tracer les courbes intégrales des équations $dy/dx = kx^\alpha y^\beta$, $\sin y/\sin x$, $\sin x/\sin y$.

EXERCICE 3. Tracer les orbites de l'équation du pendule $\dot{x} = y, \dot{y} = -\sin x$.

Nota. Considérer l'équation à variables séparables $dy/dx = -(\sin x)/y$.

7. Exemple : modèle de Lotka-Volterra. Au pt. 12 du § 1 nous avons étudié un modèle élémentaire de coexistence de y prédateurs (des brochets) et de x proies (des carassins) ;

$$\dot{x} = kx - axy, \quad \dot{y} = -ly + bxy. \tag{9}$$

Mais nous n'avons pu tracer les orbites de ces équations.

THÉORÈME 1. *Les orbites du système* (9) *sont fermées* (fig. 34).

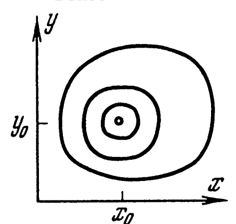
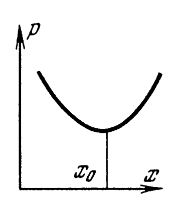
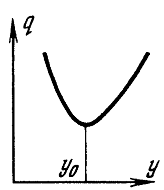


Fig. 34. Orbites du modèle de Lotka-Volterra





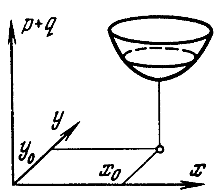


Fig. 35. Construction des orbites du modèle de Lotka-Volterra

Démonstration. Les orbites du système (9) sont confondues avec les courbes intégrales de l'équation à variables séparables $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y(bx - l)}{x(k - ay)}$ ou avec les orbites de l'équation-produit

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{x}{bx - l}, \quad \frac{dy}{d\tau} = \frac{y}{k - ay}$$

(dans un domaine où x, y, $bx - l$ et $k - ay$ ne s'annulent pas).

Donc, $\displaystyle\int \frac{k - ay}{y}\, dy = \int \frac{bx - l}{x}\, dx + C$, ou $p(x) + q(y) = C$, où

$p = bx - l \ln x$, $q = ay - k \ln y$. Les graphiques des fonctions p et q ont la forme de fosses. Donc, celui de la fonction $p + q$ aura aussi la forme d'une fosse (fig. 35), et par suite, les lignes de niveau de la fonction $p + q$ sont des courbes fermées. Il est immédiat de vérifier que les orbites de l'équation (9) non seulement appartiennent aux lignes de niveau de la fonction $p + q$ mais sont confondues avec elles. C.Q.F.D.

Les orbites du modèle de Lotka-Volterra étant fermées, les nombres de carassins et de brochets varient périodiquement avec le temps. La période de fluctuation dépend de la condition initiale.

EXERCICE 1. Montrer que dans le modèle de Lotka-Volterra (9) la période de fluctuation tend vers l'infini lorsque la condition initiale tend vers le point (0, 0).

REMARQUE. Il faut faire une distinction entre la tendance vers l'infini au sens mathématique et au sens physique. Par exemple, $1/\varepsilon$ tend effectivement vers ∞ lorsque ε tend vers 0 (pour $\varepsilon = 10^{-6}$, la quantité $1/\varepsilon$ est très grande). En même temps, lorsque $\varepsilon \to 0$, la quantité $|\ln \varepsilon|$ est pratiquement bornée (pour $\varepsilon = 10^{-6}$, cette quantité est de l'ordre de 10). Dans ces conditions, on peut souvent manipuler les logarithmes comme des constantes.

EXERCICE 2. Comment la période de fluctuation dans le modèle de Lotka-Volterra (9) tend-elle vers l'infini lorsque la condition initiale est de la forme (x_0, ε), $\varepsilon \to 0$?

Réponse. Logarithmiquement.

Tirons quelques conclusions de nos calculs.

Dans le système de Lotka-Volterra (9)

1) Il existe une position d'équilibre (x_0, y_0) (et une seule pour $x > 0$, $y > 0$).

2) Les nombres de carassins et de broches varient périodiquement si les conditions initiales ne sont pas des positions d'équilibre.

3) Les orbites sont fermées.

Signalons qu'il est peu probable que notre modèle puisse prétendre décrire assez fidèlement la réalité, même si l'on se confine dans le cadre d'un espace des phases à deux dimensions. Par exemple, même en l'absence de brochets la vitesse de reproduction des carassins devra à la longue diminuer, sinon ils ne tiendraient plus dans l'étang, etc. Ceci nous incite à penser qu'un modèle plus exact est de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = x(k - ay + \varepsilon f(x, y)), \\ \dot{y} = y(-l + bx + \varepsilon g(x, y)), \end{cases} \qquad (9_\varepsilon)$$

où $x\varepsilon f$ et $y\varepsilon g$ sont les petites corrections négligées lors de l'idéalisation du modèle (dans la première équation, la correction est divisible par x, puisque la vitesse de reproduction des carassins est nulle si le nombre de carassins est égal à 0 ; dans la deuxième équation, la correction est divisible par y pour la même raison). On admettra que f et g sont des fonctions différentiables (à strictement parler, ici et dans la suite on considère une région bornée

du plan de phases, puisque les corrections n'ont aucune raison d'être petites pour de très grandes valeurs des coordonnées).

Nous dirons qu'une propriété du modèle (9) est *structurellement stable* ou *opiniâtre* si elle (ou une propriété voisine analogue) a lieu pour tout système (9_ε) pour ε assez petit.

Considérons sous cet angle les conclusions 1), 2) et 3) faites plus haut.

THÉORÈME 2. *Le système* (9_ε) *admet une position d'équilibre* $(x(\varepsilon), y(\varepsilon))$ *dépendant différentiablement de* ε *petit et telle que* $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ *est la position d'équilibre du système* (9).

Démonstration. D'après le théorème des fonctions implicites, le système d'équations en x et y

$$F(x, y, \varepsilon) = 0, \quad G(x, y, \varepsilon) = 0$$

admet une solution $(x(\varepsilon), y(\varepsilon))$ dépendant différentiablement de ε petit, qui se transforme en (x_0, y_0) pour $\varepsilon = 0$ si le jacobien $J = D(F, G)/D(x, y)|_{(x_0, y_0, 0)}$ est différent de 0.

Dans notre cas, $F = k - ay + \varepsilon f$, $G = -l + bx + \varepsilon g$, et par suite, $J = \begin{vmatrix} 0 & -a \\ b & 0 \end{vmatrix} \neq 0$. C.Q.F.D.

Ainsi la propriété 1) est opiniâtre : admet une position d'équilibre non seulement le système (9) mais tout système voisin (9_ε).

Par contre, les conclusions 2) et 3) ne sont pas opiniâtres. En effet, l'application de Poincaré du système (9) est de la forme $\Phi(A) \equiv A$. Pour le système voisin (9_ε), le graphique de l'application de Poincaré sera voisin de la diagonale mais pas nécessairement confondu avec elle. Selon la forme des perturbations f et g, le diagramme de Lamerey peut être situé au-dessus ou au-dessous de la diagonale ou encore la couper en un ou plusieurs points correspondant aux cycles stables et instables.

Donc, *les conclusions relatives à la fermeture des orbites et à la périodicité des fluctuations du nombre de carassins et de brochets avec une amplitude dépendant des conditions initiales ne sont pas opiniâtres* ; bien que dans le système (9_ε) chaque hélice d'orbite soit proche d'un cycle fermé, elle ne se boucle pas entièrement et au bout d'un long intervalle de temps (de l'ordre de $1/\varepsilon$) il s'établit, par exemple, un régime auto-excité (l'orbite s'enroule autour d'un cycle limite).

La propriété d'un système de posséder un cycle limite est stable par les petites perturbations du système d'équations. Plus exactement, supposons qu'un cycle correspond à un point fixe $A = \Phi(A)$ de l'application de Poincaré Φ et que $\Phi'(A) \neq 1$. Un tel cycle est dit *non dégénéré.*

Si un système défini par un champ de vecteurs v_0 *possède un cycle limite non dégénéré passant par un point* A_0, *tout système voisin* (*défini par un champ* v_ε, *où* ε *est petit*) *admet un cycle voisin* (*passant par un point* $A_{(\varepsilon)}$ *voisin de* A_0).

Pour établir cette proposition, il faut appliquer le théorème des fonctions implicites à l'équation $\Phi(A, \varepsilon) = A$, $A(0) = A_0$.

Donc, *la conclusion que le système présente des fluctuations auto-excitées décrites par un cycle limite non dégénéré est opiniâtre* : tout système proche donnera lieu à des fluctuations auto-excitées voisines.

Remarquons que les cycles limites dégénérés peuvent disparaître par une petite déformation du système. Néanmoins on ne peut les éliminer par une petite déformation dans le cas où l'on envisage non pas un seul mais toute une famille de systèmes dépendant d'un paramètre. Dans ce cas, des cycles différents peuvent fusionner pour certaines valeurs du paramètre, un tel fusionnement ayant lieu pour une valeur voisine du paramètre dans toute famille voisine. Un cycle dégénéré apparaît justement au moment du fusionnement de deux cycles non dégénérés. Ceci étant, l'un des deux cycles est stable, l'aûtre instable. Les cycles dégénérés engendrés par le fusionnement de deux cycles non dégénérés sont intéressants par ce qu'ils se rencontrent toujours sur la frontière du domaine d'existence d'un régime oscillatoire dans l'espace des paramètres.

Par exemple la figure 36 représente les diagrammes de Lamerey pour trois valeurs très proches du paramètre (les courbes *1*, *2* et *3*). Le diagramme *1* coupe la bissectrice en deux points ; dans ce cas le système possède deux cycles limites dont le stable est situé à l'intérieur de l'instable (fig. 37). La position d'équilibre est instable ; le domaine situé à l'intérieur du cycle instable est le domaine d'attraction (un « bassin ») du cycle stable : si les conditions initiales se trouvent dans ce domaine (exception faite de la position d'équilibre), il s'établit dans le système des fluctuations auto-excitées qui sont représentées par le cycle stable.

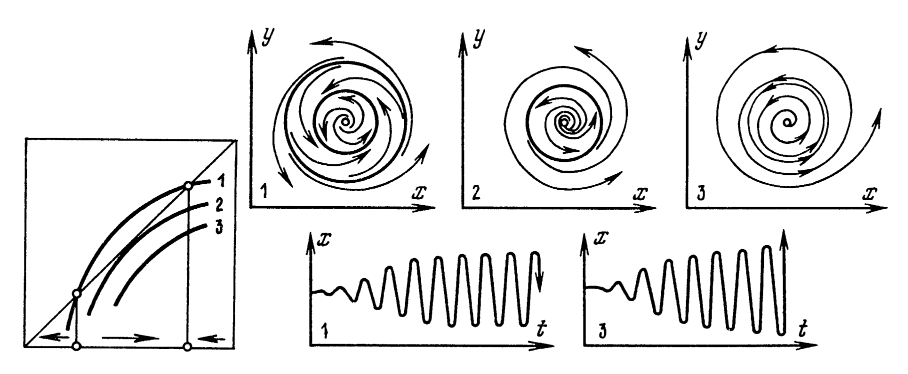


Fig. 36. "Péréstroïka" des diagrammes de Lamerey

Fig. 37. "Péréstroïka" du portrait de phase et comportement des solutions

La courbe *2* correspond à une valeur critique du paramètre : le cycle stable fusionne avec le cycle instable et devient dégénéré. Les orbites qui naissent dans le domaine borné par le cycle dégénéré tendent vers ce cycle lorsque t croît. Il s'établit alors un régime oscillatoire qui toutefois est instable : une variation accidentelle si petite soit-elle est susceptible d'expédier le point représentatif hors des limites du cycle.

Lorsque le paramètre continue de varier (courbe *3*) le cycle disparaît complètement. La fusion des cycles conduit donc à une variation discontinue du système : le régime auto-excité stable à domaine d'attraction fini disparaît subitement. Les mouvements dont la condition initiale est située dans le bassin d'un cycle en voie de disparition partent, après la disparition de ce cycle, vers d'autres domaines de l'espace des phases (fig. 37). Dans notre exemple, lorsque

le paramètre passe par une valeur critique, un écart, si petit soit-il, du nombre initial de prédateurs et de proies par rapport à la position d'équilibre conduit à un accroissement illimité des fluctuations et par suite à l'extinction.

La « péréstroïka » des orbites par une variation des paramètres est étudiée en *théorie des bifurcations*, quant aux applications de la théorie des bifurcations à l'étude des réponses discontinues des systèmes mécaniques, physiques, chimiques, biologiques, économiques et autres, à une variation continue des facteurs extérieurs, elles ont reçu, ces derniers temps, le nom de *théorie des catastrophes.*

Sur la figure 36 on voit que si la valeur du paramètre diffère de la valeur critique d'une petite quantité Δ, la distance entre le cycle stable et le cycle instable est de l'ordre de $\sqrt{\Delta}$. Donc, la vitesse de rapprochement des cycles, lorsque le paramètre varie, croît d'autant plus vite que le paramètre se rapproche de sa valeur critique : à l'instant même de la catastrophe, les deux cycles se déplacent l'un vers l'autre à une vitesse infinie. Ceci explique pourquoi il est si difficile d'éviter les catastrophes engendrées par une perte de stabilité dont on a perçu les premiers signes.

EXERCICE 3. Etudier les bifurcations des cycles engendrées par les variations du paramètre c d'un système défini en coordonnées polaires par les équations

$$\dot{r} = cr - r^3 + r^5, \quad \dot{\varphi} = 1.$$

Réponse. Pour $c = 0$, un cycle stable de rayon d'ordre $\sqrt{c}$ prend naissance en la position d'équilibre $r = 0$; pour $c = 1/4$ il disparaît et fusionne avec le cycle instable.

REMARQUE. On démontre que l'apparition ou la disparition d'un cycle en une position d'équilibre, de même que l'apparition ou la disparition d'un couple de cycles, est un phénomène typique engendré par les variations du paramètre dans les familles à un paramètre d'équations différentielles générales.

Les cycles limites stables décrivent les oscillations périodiques permanentes d'un système placé dans un environnement stationnaire. Les oscillations décrites par les cycles stables s'appellent *auto-excitées* contrairement aux oscillations *forcées* engendrées par des forces extérieures périodiques et aux oscillations genre oscillations libres du pendule. L'apparition des oscillations auto-excitées est un phénomène assez étonnant en soi, mais on les rencontre par exemple dans des systèmes tels que la montre, la machine à vapeur, la sonnerie électrique, le cœur, l'émetteur radio, les étoiles variables de type céphéide. Le fonctionnement de chacun de ces systèmes est décrit par un cycle limite dans l'espace des phases correspondant.

Toutefois il ne faut pas croire que tous les processus oscillatoires se décrivent par des cycles limites : dans un espace des phases à plusieurs dimensions les orbites peuvent avoir

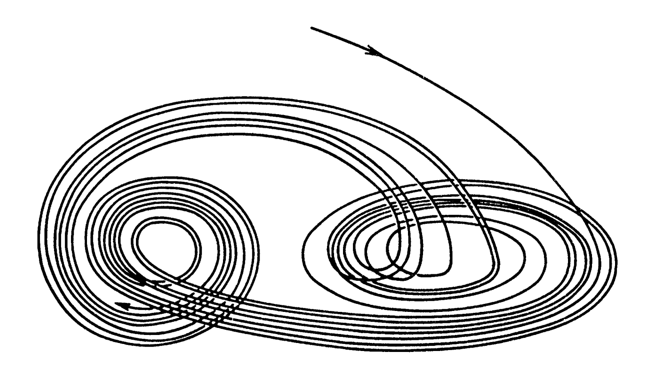


Fig. 38. Attracteur avec des orbites excessivement sensibles aux conditions initiales

un comportement bien plus compliqué. Comme exemples citons la précession du gyroscope, le mouvement des planètes et de leurs satellites, leurs rotations autour de leurs axes (la non-périodicité de ces mouvements est responsable de la complexité du calendrier et des difficultés à prédire les marées), le mouvement de particules chargées dans des champs magnétiques (qui est responsable des aurores polaires). Nous étudierons des mouvements élémentaires de cette nature aux §§ 24 et 25, pt. 6. Les orbites de systèmes à espace des phases à plusieurs dimensions peuvent même au lieu d'un cycle se rapprocher d'un ensemble sur lequel toutes les trajectoires voisines s'éloignent rapidement l'une de l'autre (fig. 38). Ces ensembles sont appelés depuis peu *étranges attracteurs* : ils sont liés aux phénomènes genre turbulence et rendent, par exemple, impossible toute prévision météorologique à long terme.

§ 3. Equations linéaires

Les équations linéaires décrivent l'influence de petites variations des conditions initiales ou des seconds membres d'équations arbitraires sur leurs solutions. Dans ce paragraphe, on intègre explicitement et on étudie les équations différentielles linéaires homogènes et non homogènes à une variable dépendante : on verra apparaître l'opérateur de monodromie, la fonction δ, la fonction de Green et les oscillations forcées.

1. Equations homogènes linéaires.

DÉFINITION. On appelle *équation homogène linéaire du premier ordre* une équation de la forme

$$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = f(x)y, \tag{1}$$

dont le second membre est une fonction (homogène) linéaire d'une variable dépendante y à une dimension.

C'est un cas particulier de l'équation à variables séparables. La méthode générale de résolution nous donne $\mathrm{d}y/y = f(x)\mathrm{d}x$, $\ln (y/y_0) = \int_{x_0}^{x} f(\xi)\mathrm{d}\xi$.

Ce qui entraîne le

THÉORÈME. *Toute solution de l'équation* (1) *se prolonge à l'intervalle de définition tout entier de la fonction f ; la solution qui vérifie la condition initiale* (x_0, y_0) *est définie par la formule* $y = y_0 e^{\int_{x_0}^{x} f(\xi)\mathrm{d}\xi}$.

REMARQUE 1. Soit $y = \varphi(x)$ une solution de l'équation (1). Alors la fonction $y = c\varphi(x)$ est aussi une solution, quelle que soit la constante c. La somme de deux solutions (définies sur tout l'intervalle de définition de f) de l'équation (1) est aussi une solution. Donc, toutes les solutions de l'équation homogène linéaire (1) forment un *espace vectoriel*. Cet espace est à une dimension (pourquoi ?).

Remarque 2. Les dilatations de l'espace des phases élargi (x, y) le long de l'axe y envoient le champ de directions de l'équation linéaire homogène (1) dans lui-même. Donc, *les courbes intégrales se transforment l'une en l'autre par les dilatations de l'axe y* : ces courbes peuvent être obtenues à partir de l'une d'elles par de telles dilatations (fig. 39).

Les équations linéaires occupent une place particulière en théorie des équations différentielles, car en vertu d'une idée fondamentale de l'analyse toute fonction différentiable se laisse bien approcher par une fonction linéaire au voisinage de chaque point. Cette *linéarisation* nous conduit à une équation linéaire qui est la première approximation de l'équation envisagée au voisinage d'une solution.

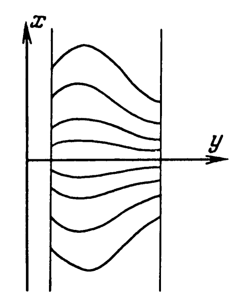


Fig. 39. Courbes intégrales d'une équation linéaire

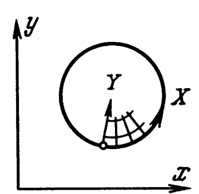


Fig. 40. Système de coordonnées au voisinage du cycle

Considérons par exemple un système autonome à espace des phases à deux dimensions (x, y), possédant un cycle limite (fig. 40). Rapportons le voisinage du cycle à des coordonnées $(X \bmod T, Y)$ telles que l'équation du cycle prenne la forme $Y = 0$ et que le parcours du cycle dans le sens de la vitesse de phase corresponde à un accroissement de X sur T. Les orbites du système initial se transforment alors par l'application $(x, y) \mapsto (X, Y)$ en courbes intégrales d'une équation de la forme

$$\mathrm{d}Y/\mathrm{d}X = a(X, Y), \quad \text{où} \quad a(X, 0) \equiv 0, \quad a(X + T, Y) \equiv a(X, Y). \qquad (2)$$

La linéarisation de cette équation par rapport à Y au point $Y = 0$ nous amène à l'équation linéaire

$$\mathrm{d}Y/\mathrm{d}X = f(X)Y, \quad \text{où} \quad f(X) = \partial a/\partial Y|_{Y=0}.$$

On remarquera que la fonction f est T-périodique.

Nous sommes conduits à l'intégration d'une équation linéaire à coefficient périodique f.

2. Equations linéaires homogènes du premier ordre à coefficients périodiques.

Définition. On appelle *équation linéaire homogène du premier ordre à coefficients T-périodiques* une équation de la forme

$$\mathrm{d}Y/\mathrm{d}X = f(X)Y, \quad \text{où} \quad f(X + T) \equiv f(X). \qquad (3)$$

Les solutions de l'équation (3) définissent une application linéaire de l'axe Y dans lui-même, associant à la valeur $\varphi(0)$ de $\varphi(X)$ pour $X = 0$ la valeur $\varphi(T)$ de la même solution pour $X = T > 0$. Cette application $A : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ s'appelle *monodromie* (fig. 41). (On se propose d'utiliser un opérateur analogue dans le cas multidimensionnel.)

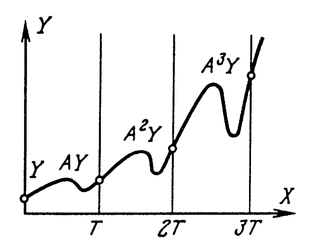


Fig. 41. Opérateur de monodromie

THÉORÈME. *L'opérateur de monodromie* $A : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *de l'équation linéaire* (3) *est un opérateur linéaire de multiplication par un nombre* $\lambda > 0$ (*appelé multiplicateur*). *Lorsque* $X \to +\infty$, *toutes les solutions non nulles tendent vers l'infini ou vers* 0 *selon que* $\lambda > 1$ *ou* $\lambda < 1$; *si* $\lambda = 1$, *toutes les solutions sont bornées.*

Démonstration. La linéarité de A résulte du fait que les dilatations le long de Y transforment les courbes intégrales en courbes intégrales ; $\lambda > 0$, c'est-à-dire que l'axe X est une courbe intégrale. Les T-translations le long de l'axe X transforment aussi les courbes intégrales en courbes intégrales (puisque f est périodique). Il s'ensuit que la solution vérifiant la condition initiale $\varphi(0) = Y$ prend les valeurs λY, $\lambda^2 Y$, $\lambda^3 Y$, ... respectivement pour $X = T$, $2T$, $3T$, ... ; donc, lorsque $N \to +\infty$, $\varphi(NT)$ tend vers l'infini si $\lambda > 1$ et vers 0 si $\lambda < 1$. Par ailleurs, une NT-translation de l'espace des phases élargi le long de l'axe X nous donne

$$\varphi(NT + S) = \lambda^n \varphi(S),$$

d'où découlent toutes les assertions à prouver (pourquoi ?).

REMARQUE. Le théorème du pt. 1 entraîne la formule du multiplicateur

$$\ln \lambda = \int_0^T f(\xi) d\xi.$$

Donc, *le multiplicateur* λ *est* >1 *ou* <1 *selon que la valeur moyenne de la fonction* f *est* >0 *ou* <0.

Dans le premier cas, la solution nulle de l'équation linéaire (3) est instable, dans le second, elle est stable (de plus, les solutions vérifiant une condition initiale proche de 0 tendent vers 0) ; lorsque $\lambda = 1$, les solutions vérifiant une condition initiale non nulle sont périodiques (fig. 42).

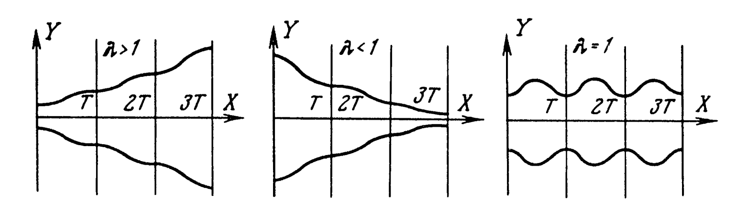


Fig. 42. Stabilité de la solution nulle

Une question vient naturellement à l'esprit : quel rapport existe-t-il entre le théorème relatif aux solutions de l'équation linéarisée (3) et le problème initial du comportement des solutions de l'équation non linéaire (2), c'est-à-dire le problème des orbites voisines d'un cycle ?

EXERCICE 1. Montrer que si $\lambda > 1$, le cycle est instable et les orbites nées en son voisinage sont des spirales qui s'en éloignent en se déroulant ; si $\lambda < 1$, le cycle est stable et les orbites nées en son voisinage sont des spirales s'enroulant sur lui.

Autrement dit, lorsque le multiplicateur est différent de 1, la linéarisation nous conduit à un raisonnement correct sur la stabilité du cycle. D'autre part, si $\lambda = 1$, bien que les solutions de l'équation (3) soient périodiques, il serait incorrect d'étendre cette conclusion de l'équation linéarisée (3) à l'équation initiale (2) dont les solutions voisines de $Y = 0$ ne sont pas en général périodiques et il est impossible de juger de la stabilité du cycle d'après l'équation linéarisée.

Nota. Considérer l'application de Poincaré Φ définie par les solutions φ de l'équation (2) et associant à la condition initiale $Y = \varphi(0)$ pour $X = 0$ la valeur $\Phi(Y) = \varphi(T)$. Montrer que la linéarité de Φ au point $Y = 0$ est l'opérateur de monodromie.

EXERCICE 2. Etudier la stabilité du cycle limite $r = 1$ pour le système défini en coordonnées polaires par les équations

$$\dot{r} = (r^2 - 1)(2x - 1), \quad \dot{\varphi} = 1 \quad (\text{où } x = r \cos \varphi).$$

3. Equations linéaires non homogènes.

DÉFINITION. On appelle *équation linéaire non homogène du premier ordre* une équation de la forme

$$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = f(x)y + g(x). \tag{4}$$

Par solution on entend une solution définie sur l'intervalle de définition tout entier des fonctions f et g.

THÉORÈME 1. *Les solutions de l'équation* (4) *sont toutes de la forme* $y = \varphi_1(x) + \varphi_0(x)$, *où* $\varphi_1(x)$ *est une solution particulière de* (1) *et* φ_0 *la solution générale de l'équation homogène associée* (1) ; *toute fonction de cette forme est solution de l'équation* (4).

Démonstration. Soit $A : L_1 \to L_2$ un opérateur linéaire (fig. 43). Les solutions φ_0 de l'équation homogène $A\varphi_0 = 0$ forment un espace vectoriel $\operatorname{Ker} A \subset L_1$. L'image $\operatorname{Im} A = AL_1$ est un sous-espace vectoriel de L_2. Si $g \in \operatorname{Im} A$, les solutions de l'équation non homogène $A\varphi = g$ forment dans L_1 un sous-espace affine $\varphi_1 + \operatorname{Ker} A$, parallèle à $\operatorname{Ker} A$. Dans notre cas,

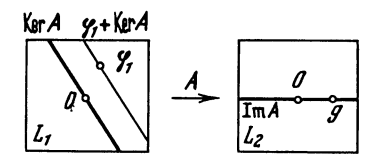


Fig. 43. Espace des solutions d'une équation linéaire non homogène

$A\varphi = \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}x - f\varphi$. C'est un opérateur linéaire *), donc l'assertion du théorème résulte du théorème d'algèbre relatif à la solution d'une équation linéaire non homogène.

Pour touver une solution particulière, on peut se servir de la méthode de « variation des constantes ».

La méthode de variation des constantes est souvent appliquée à l'étude de l'influence des perturbations. Considérons par exemple le mouvement des planètes autour du Soleil. En première approximation, si l'on néglige les attractions réciproques des planètes, on obtient un mouvement indépendant elliptique conformément aux lois de Kepler. Ceci est la solution des équations non perturbées du mouvement.

L'attraction mutuelle perturbatrice des planètes peut être prise en considération de la manière suivante : on admet que les planètes accomplissent un mouvement képlérien, mais les paramètres des ellipses varient légèrement avec le temps **). Donc les quantités qui étaient constantes dans le mouvement non perturbé seront traitées désormais comme des fonctions du temps.

Les équations différentielles décrivant les variations de ces constantes sont souvent plus simples à intégrer ou à étudier que les équations initiales. En particulier, appliquée aux équations linéaires non homogènes, où l'équation non perturbée est l'équation homogène et la perturbation, la non-homogénéité, la méthode de variation des constantes nous conduit à une formule explicite pour la solution. Dans ce cas, il n'est pas besoin d'exiger que la perturbation soit petite.

Nous savons déjà que toute solution de l'équation homogène (1) est de la forme $y = c\varphi(x)$, où c est une constante arbitraire et φ une solution quelconque non triviale. Essayons de choisir $c = c(x)$ de telle sorte que $y = c(x)\varphi(x)$ soit solution de l'équation non homogène (4).

---

*) Les espaces L_1 et L_2 peuvent être choisis de différentes façons. On peut par exemple admettre que L_1 est l'espace des fonctions une fois continûment dérivables et L_2 celui des fonctions continues.

**) Par exemple, les oscillations de l'excentricité de l'orbite de la Terre sont l'une des causes des périodes glaciaires.

THÉORÈME 2. *L'équation linéaire non homogène* (4) *admet une solution et une seule vérifiant la condition initiale* $y(x_0) = 0$, *qui est définie par la formule*

$$y = \int_{x_0}^{x} e^{\int_{\xi}^{x} f(\zeta)d\zeta} g(\xi)d\xi. \tag{5}$$

Démonstration. En portant $y = c(x)\varphi(x)$ dans (4), on obtient

$$c'\varphi + c\varphi' = fc\varphi + g.$$

Or φ est solution de l'équation homogène (1), donc $\varphi' = f\varphi$ et

$$c' = g/\varphi, \quad c(x) = \int_{x_0}^{x} g(\xi)/\varphi(\xi)d\xi.$$

En substituant à φ la solution connue de l'équation homogène, on obtient (après avoir porté $\varphi(x)$ sous le signe d'intégration) la formule (5). C.Q.F.D.

4. Fonction d'influence et δ-inhomogénéité. La formule (5) admet l'interprétation physique simple suivante.

On a de toute évidence le

PRINCIPE DE SUPERPOSITION. *Si* φ_1 *et* φ_2 *sont solutions des équations linéaires non homogènes* $A\varphi_1 = g_1$ *et* $A\varphi_2 = g_2$, *alors* $\varphi_1 + \varphi_2$ *est solution de l'équation* $A\varphi = g_1 + g_2$.

Ce principe permet de dissocier les perturbations, de calculer séparément leur influence et d'ajouter les effets de la perturbation résultante (par exemple, si l'on jette deux cailloux dans l'eau, on peut calculer séparément les ondes engendrées par chacun d'eux et ajouter ces perturbations; lorsqu'on tire un obus, on peut apporter séparément les corrections dues au vent, à l'écart de la densité de l'air par rapport à la densité théorique, etc.).

Dans l'équation non homogène (4) le rôle de la perturbation incombe à la fonction g. Essayons de représenter la fonction g par une combinaison linéaire de « perturbations élémentaires » ; la solution sera alors aussi une combinaison linéaire de solutions d'équations ayant pour second membre g des perturbations élémentaires.

DÉFINITION. On appelle *δ-suite* une suite $\{h_N\}$ de fonctions différentiables positives, nulles à l'extérieur de voisinages tendant vers 0 lorsque $N \to \infty$ et possédant chacune une intégrale égale à 1.

Il est aisé de construire un exemple d'une telle suite (fig. 44). Les physiciens disent que la « limite de la suite $\{h_N\}$ est la fonction δ de Dirac qui est partout nulle sauf en 0 et dont l'intégrale est égale à 1 ».

Certes, il n'existe pas de fonction δ jouissant de telles propriétés.

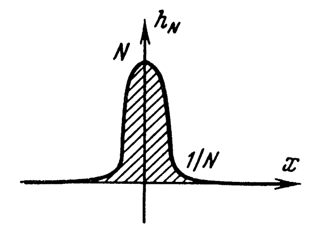


Fig. 44. δ-suite

Cependant de nombreuses quantités définies à l'aide des fonctions h_N tendent, lorsque $N \to \infty$, vers des limites qui portent le nom de ces quantités calculées pour la fonction δ. Par exemple, pour toute fonction continue g

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_N(x)g(x)\mathrm{d}x = g(0)$$

(prouvez-le !). Donc par définition

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)g(x)\mathrm{d}x = g(0).$$

De façon analogue, une ξ-translation des fonctions h_N le long de l'axe x nous donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - \xi)g(x)\mathrm{d}x = g(\xi),$$

autrement dit, $\delta(\cdot - \xi)$ est une « fonction de Dirac concentrée au point ξ ».

La dernière formule peut aussi être interprétée comme la représentation de toute fonction différentiable g par une « combinaison linéaire continue » de fonctions de Dirac concentrées en divers points x, avec des coefficients égaux aux valeurs prises par g en ces points.

Donc, toute inhomogénéité g de l'équation (4) peut être décomposée en une combinaison linéaire continue d'inhomogénéités « concentrées en un point », ayant la forme de translatées de fonctions de Dirac. D'après le principe de superposition, pour trouver une solution particulière de l'équation (4) avec une inhomogénéité arbitraire, il suffit de prendre cette solution pour δ-inhomogénéité.

Définition. La solution de l'équation

$$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = f(x)y + \delta(x - \xi), \qquad \xi > 0,$$

qui vérifie la condition initiale $y(0) = 0$ s'appelle *fonction d'influence de la*

perturbation à l'instant ξ *sur la solution à l'instant* x (ou *fonction de Green* *)) et se note : $y = G_\xi(x)$.

Théorème. *La fonction de Green est donnée par la formule*

$$G_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad x < \xi, \\ e^{\int_\xi^x f(\zeta)\mathrm{d}\zeta} & \text{pour} \quad x > \xi. \end{cases} \tag{6}$$

Remarque. Comme déjà expliqué plus haut, il s'agit de la limite de la suite des solutions des équations

$$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = f(x)y + h_N(x - \xi), \tag{7}$$

où $\{h_N\}$ est une δ-suite lorsque $N \to \infty$, qui vérifient la condition initiale $y(0) = 0$.

Démonstration euristique. Pour $x < \xi$, la solution est nulle, puisque l'inhomogénéité disparaît. Pour $x > \xi$, la solution est confondue avec une solution de l'équation homogène, puisque l'inhomogénéité disparaît. Pour x voisin de ξ, le second terme du second membre de l'équation (7) est grand en regard du premier, donc l'intégrale de $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ étendue à un petit voisinage du point ξ est presque égale au nombre

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_N(x - \xi)\mathrm{d}x = 1.$$

En faisant tendre $N \to \infty$, on voit que lorsque x passe par le point ξ la solution $y(x)$ subit un saut égal à 1, i.e. pour $x > \xi$, la fonction G_ξ de la variable x est la solution de l'équation homogène, qui vérifie la condition initiale $y(\xi) = 1$. C.Q.F.D.

On pourrait conférer à ce raisonnement la rigueur voulue mais il est plus simple de produire la démonstration suivante.

Démonstration mathématique. Dans la formule (5) de la solution de l'équation (4), en remplaçant g par la ξ-translatée de h_N et en faisant tendre N vers ∞, on obtient ce qu'on voulait :

$$G_\xi(x) = \lim_{N\to\infty} \int_{x_0}^{x} e^{\int_\nu^x f(\zeta)\mathrm{d}\zeta} h_N(\nu - \xi)\mathrm{d}\nu = e^{\int_\xi^x f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}, \quad x_0 < \xi < x.$$

*) Cette fonction s'appelle encore *fonction de Green retardée* afin d'éviter toute confusion avec les foncions de Green des problèmes aux limites pour équations d'ordre supérieur au premier qui ne seront pas étudiées ici.

COROLLAIRE. *La solution de l'équation non homogène* (4) *qui vérifie la condition initiale triviale s'exprime au moyen de la fonction d'influence par la formule* $y(x) = \int_0^x G_\xi(x)g(\xi)d\xi$ *pour* $x > 0$.

Cette formule est visiblement équivalente à (5) (en vertu de (6)).

EXERCICE. Intégrer l'équation $dy/dx = y + h_N$, où $h_N(x) = N$ pour $|x - 1| < 1/2N$ et 0 pour $|x - 1| \geqslant 1/2N$, avec la condition initiale triviale $y(0) = 0$ et trouver la limite de la solution lorsque $N \to \infty$.

5. Equations linéaires non homogènes à coefficients périodiques.

THÉORÈME. *Si dans l'équation*

$$dy/dx = f(x)y + g(x)$$

à second membre périodique (de période $T > 0$ *par rapport à* x*) la moyenne de la fonction* f *par rapport à la période est différente de* 0, *cette équation admet une solution* T*-périodique et une seule (stable ou instable selon que cette moyenne est* <0 *ou* >0, fig. 45).

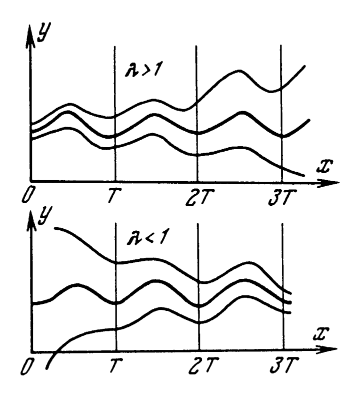


Fig. 45. Etablissement d'une oscillation forcée

Démonstration. Considérons l'application en une période, qui à la valeur $\varphi(0)$ de la solution φ associe la valeur $\varphi(T)$ de la même solution à l'instant T. Cette application est linéaire non homogène (pourquoi ?) ; elle est de la forme $\varphi(T) = \lambda\varphi(0) + C$, où λ est un multiplicateur de l'équation homogène. Le logarithme de λ est égal à l'intégrale de f sur une période. Donc $\lambda \neq 1$ si la valeur moyenne de f n'est pas nulle. C.Q.F.D.

Donc, *si* $\lambda < 1$, *après un « processus transitoire » il s'établit dans le système un régime oscillatoire bien défini indépendamment de la condition initiale.* Les oscillations engendrées s'appellent *oscillations forcées*. Elles sont dues à une action extérieure périodique exercée sur le système i.e. à la fonction g.

EXERCICE 1. Trouver la solution périodique de l'équation

$$dy/dx = -y + \sin x$$

et étudier sa stabilité.

REMARQUE. Les équations linéaires non homogènes se présentent dans les cas où l'on étudie l'influence de petites perturbations de la condition initiale et simultanément de petites perturbations du *second membre* de l'équation différentielle sur la solution (on néglige les quantités d'ordre de petitesse supérieur à 1 par rapport aux perturbations). L'inhomogénéité g de l'équation (4) est justement responsable de la perturbation de cette *équation*.

Par exemple, si un champ de vecteurs est faiblement perturbé au voisinage d'un cycle limite de multiplicateur $\neq 1$, ce cycle ne disparaît pas, il se déforme légèrement ; la solution périodique de l'équation linéaire non homogène correspondante est une première approximation de la déformation de ce cycle.

EXERCICE 2. Supposons qu'une fonction différentiable $\varphi(t, \varepsilon)$, solution d'une équation $\dot{x} = v(t, x ; \varepsilon)$ dépendant d'un paramètre ε, se transforme en une solution $\varphi_0(t)$ de l'équation $\dot{x} = v(t, x ; 0)$ pour $\varepsilon = 0$. Montrer que la dérivée de cette solution par rapport au paramètre ε, i.e. $\psi(t) = \partial\varphi/\partial\varepsilon|_{\varepsilon=0}$, est solution de l'équation linéaire non homogène $\dot{\psi} = f(t)\psi + g(t)$, où f et g sont les valeurs de $\partial v/\partial x$ et $\partial v/\partial \varepsilon$ pour $\varepsilon = 0$, $x = \varphi_0(t)$. Cette équation s'appelle *équation aux variations* (non homogène), puisque ψ décrit une petite variation de la solution entraînée par une petite variation de l'équation associée à $\varepsilon = 0$.

§ 4. Flots

La formalisation mathématique de la notion de processus déterministe conduit à la notion de groupe à un paramètre de transformations.

On définit et on étudie les groupes à un paramètre de difféomorphismes et leurs liens avec les champs de vecteurs. On aura besoin de quelques termes d'algèbre. Tous les théorèmes de ce paragraphe sont pratiquement évidents.

1. Action d'un groupe sur un ensemble. On appellera *transformation* d'un ensemble une application bijective de cet ensemble sur lui-même.

EXERCICE 1. Lesquelles des applications suivantes sont des transformations :

1) $\mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto e^x$; 2) $\mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto x^3$; 3) $\mathbf{C} \to \mathbf{C}, z \mapsto z^3$.

Réponse. La deuxième seulement.

On appelle *produit* fg des transformations f et g d'un ensemble la transformation obtenue en appliquant d'abord g et ensuite f, i.e. $(fg)(x) = f(g(x))$.

EXERCICE 2. Citer un exemple où fg n'est pas confondu avec gf.

La *réciproque* f^{-1} de f est définie par la condition : si l'image de x par f est y, l'image de y par f^{-1} est x.

Une famille de transformations d'un ensemble forme un *groupe de transformations* si elle contient toute transformation avec sa réciproque ainsi que tout couple de transformations avec leur produit.

EXERCICE 3. Les symétries par rapport aux hauteurs d'un triangle équilatéral forment-elles un groupe de transformations ?

EXERCICE 4. Combien d'éléments contient

1) le groupe des isométries *) d'un triangle équilatéral, 2) le groupe de rotations d'un tétraèdre ?

Réponse. 1) 6; 2) 12.

La notion de groupe de transformations est l'une des plus fondamentales en mathématique et en même temps l'une des plus simples : le propre du cerveau humain est de raisonner en termes d'invariants par des groupes de transformations (cela tient aussi bien à la structure de notre vision qu'à notre don de l'abstraction).

Soit A un groupe des transformations d'un ensemble X. La multiplication et l'inversion définissent les applications $A \times A \to A$ et $A \to A$ (le couple (f, g) est envoyé dans fg, l'élément g en g^{-1}). Un ensemble A muni de ces deux applications s'appelle *groupe abstrait* (ou plus brièvement *groupe*). Donc, on obtient un *groupe* à partir d'un *groupe de transformations* en *oubliant* l'ensemble transformé.

EXERCICE 5. Montrer que l'ensemble **R** des nombres réels se transforme en groupe s'il est muni de l'addition ordinaire des nombres et de l'inversion du signe.

Les algébristes définissent généralement un groupe comme un ensemble muni de deux opérations vérifiant un certain nombre d'axiomes du genre $f(gh) = (fg)h$. Ces axiomes sont automatiquement satisfaits pour les groupes de transformations. En réalité, ces axiomes expriment tout simplement que le groupe est formé à partir d'un groupe de transformations à condition d'oublier l'ensemble transformé. Ces axiomes et les définitions non motivées servent aux mathématiciens essentiellement à occulter leur science et par là même à en hausser le prestige.

Soient G un groupe, M un ensemble. On définit une *opération* ou *action du groupe G sur l'ensemble M* si à chaque élément $g \in G$ on associe une transformation $T_g : M \to M$ telle que $T_{fg} = T_f T_g$, $T_{g^{-1}} = (T_g)^{-1}$, c'est-à-dire qu'au produit de deux éléments quelconques du groupe est associé le produit des transformations correspondantes et aux éléments réciproques, les transformations réciproques correspondantes.

---

*) L'isométrie est une transformation qui conserve les distances (de sorte que la distance des images de deux points quelconques est égale à la distance de ces points).

Chaque groupe de transformations d'un ensemble opère naturellement sur cet ensemble ($T_g \equiv g$), mais il peut opérer aussi sur d'autres. Considérons par exemple un triangle équilatéral. Le groupe de ses six isométries opère sur l'ensemble de ses deux orientations : les rotations ne changent pas l'orientation, les symétries-droites la changent.

EXERCICE 6. Quelles permutations subissent les trois axes de coordonnées sous l'action du groupe des isométries du cube $\max(|x|, |y|, |z|) \leqslant 1$?

Réponse. Toutes les six.

EXERCICE 7. Comment opère le groupe des changements linéaires de coordonnées sur l'ensemble des matrices d'opérateurs linéaires de l'espace dans lui-même ?

Réponse. $T_g m = gmg^{-1}$.

La transformation T_g s'appelle aussi *action de l'élément g* du groupe G sur M. L'action du groupe G sur M définit aussi une application $T : G \times M \to M$ associant au couple $g \in G$, $m \in M$ le point $T_g m$.

Si l'action T est fixée, le résultat $T_g m$ de l'action d'un élément g de G sur un point m de M est désigné tout simplement par gm. Donc, $(fg)m = f(gm)$ et l'on peut généralement se dispenser d'écrire les parenthèses.

Fixons un point m de M et faisons opérer sur lui tous les éléments de G. Nous obtenons un sous-ensemble $\{gm, g \in G\}$ de M. Ce sous-ensemble s'appelle *orbite du point m* (pour cette action du groupe) et se note Gm.

EXERCICE 8. Trouver les orbites du groupe de rotations d'un plan autour de 0.

EXERCICE 9. Montrer que deux orbites quelconques d'une action soit ne se coupent pas soit sont confondues.

EXERCICE 10. Quel est le nombre d'orbites de l'action du groupe des isométries du tétraèdre sur l'ensemble des couples non ordonnés de ses arêtes ?

EXERCICE 11. On colorie les six faces d'un cube avec six couleurs différentes. Combien obtient-on de coloriages fondamentalement distincts (c'est-à-dire ne se transformant pas l'un en l'autre par rotation du cube) ?

Réponse. $6!/24 = 30$.

Une application $\varphi : G \to H$ d'un groupe G dans un groupe H s'appelle *homomorphisme* si

$$\varphi(fg) = \varphi(f)\varphi(g), \quad \varphi(g^{-1}) = (\varphi(g))^{-1}, \quad \forall f, \quad g \in G,$$

c'est-à-dire qu'elle associe au produit de deux éléments de G le produit dans H de leurs images et au réciproque d'un élément de G la réciproque de son image dans H.

L'action du groupe G sur l'ensemble M est un homomorphisme du groupe G dans le groupe de toutes les transformations de l'ensemble M.

2. Groupes à un paramètre de transformations. Un groupe est dit *commutatif* (ou *abélien*) si le produit de deux éléments quelconques est commutatif : $fg = gf$.

EXEMPLE 1. Le groupe des isométries du triangle équilatéral n'est pas abélien.

EXEMPLE 2. Le groupe des translations de l'axe réel est abélien.

L'opération d'un groupe abélien est généralement désignée par le symbole $+$.

Par exemple, le produit d'une a-translation par une b-translation est une $(a + b)$-translation indépendamment de l'ordre. C'est pourquoi l'ensemble des réels muni de l'addition est un groupe abélien ; l'action naturelle de ce groupe sur la droite associe à un nombre a une a-translation.

DÉFINITION. On appelle *groupe à un paramètre de transformations d'un ensemble* l'action du groupe des réels sur cet ensemble.

REMARQUE 1. Les actions du groupe $\mathbf{Z}$ des entiers s'appellent parfois «groupes à un paramètre à temps discret». Pour une telle action, $T_n = (T_1)^n$, donc tout le groupe est composé des puissances d'une seule transformation.

Un groupe à un paramètre de transformations d'un ensemble M est généralement désigné par le symbole $\{g^t\}$. Ici $g^t : M \to M$ est la transformation associée au point t de $\mathbf{R}$.

Donc, un groupe à un paramètre de transformations de M est une famille de transformations g^t paramétrées par un paramètre réel t, telle que quels que soient les réels s et t

$$1)\ g^{s+t} = g^s g^t, \qquad 2)\ g^{-t} = (g^t)^{-1}.$$

En général, le paramètre t est appelé *temps* et la transformation g^t, *transformation dans le temps t*.

EXEMPLE 3. $M = \mathbf{R}$, g^t est une $2t$-translation (i.e. $g^t x = x + 2t$). Les propriétés 1) et 2) sont évidentes.

EXEMPLE 4. $M = \mathbf{R}$, g^t est une homothétie de rapport e^t (i.e. $g^t x = e^t x$). Les propriétés 1) et 2) sont évidentes. La notation g^t avec t en indice supérieur est suggérée par cet exemple.

EXEMPLE 5. $M = \mathbf{R}$, $g^t x = x + \sin t$. La propriété 2) est réalisée mais pas la 1) ; $\{g^t\}$ n'est pas un groupe à un paramètre.

REMARQUE 2. De la propriété 1) il s'ensuit de toute évidence que g^0 est la transformation identique qui laisse chaque point invariant. Donc, la propriété 2) résulte de 1). La propriété 1) s'appelle *propriété de groupe*.

Un groupe à un paramètre de transformations d'un ensemble est l'équivalent mathématique de la notion physique de «processus déterministe bilatéral». Soit M l'espace des phases d'un processus. Tout point de cet espace figure un état bien défini de ce processus. Supposons qu'à l'instant $t = 0$ le processus se trouve à l'état x. A un autre instant t le processus sera dans un état différent. Désignons ce nouvel état du processus par $g^t x$.

Nous avons défini pour chaque instant t une application $g^t : M \to M$ de l'espace des phases du processus dans lui-même. L'application g^t transforme l'état à l'instant 0 en l'état à l'instant t. On l'appelle *transformation dans le temps t.*

L'application g^t est effectivement une transformation (une bijection). Ceci résulte du fait que par définition du déterminisme chaque état définit de façon unique aussi bien le passé que le futur du processus. La propriété de groupe est aussi remplie. En effet, supposons que le processus se trouve à l'état x à l'instant initial. On peut passer de l'état x à l'état $g^{t+s}x$ soit directement, soit en deux étapes : d'abord en accédant à l'état intermédiaire $g^t x$ et ensuite en passant de cet état à l'état $g^s x$. La coïncidence des résultats ($g^{t+s}x = g^s g^t x$) exprime que le passage de l'état initial à un état final en un temps fixe se déroule toujours de la même manière, quelle que soit la date de départ de l'état initial.

Le groupe à un paramètre des transformations de M s'appelle aussi *flot d'espace des phases M* (on peut s'imaginer l'espace des phases rempli d'eau : une particule x passe au point $g^t x$ au bout d'un temps t).

Les orbites du flot s'appellent *trajectoires* ou *courbes de phase.*

EXEMPLE 6. Soit g^t une rotation du plan d'angle t autour de 0. La propriété de groupe est visiblement remplie. Les orbites du flot $\{g^t\}$ sont le point 0 et les cercles de centre 0.

Les points qui sont des trajectoires s'appellent *points fixes* du flot.

3. Groupes à un paramètre de difféomorphismes. Supposons maintenant que l'ensemble M envisagé est muni d'une structure de variété différentiable. Comme exemples de variétés différentiables citons : 1) tout domaine d'un espace euclidien ; 2) la sphère ; 3) le tore. La définition générale est donnée au chap. 5. Pour l'instant on admettra qu'il est question d'un domaine d'un espace euclidien.

On appelle *difféomorphisme* une application différentiable avec sa réciproque. (Une application est dite différentiable si les coordonnées du point image sont des fonctions différentiables de celles du point antécédent et réciproquement.)

EXERCICE 1. Lesquelles des fonctions $2x$, $-x$, x^2, x^3, Arc tg x définissent un difféomorphisme de la droite sur elle-même ?

Réponse. Les deux premières seulement.

DÉFINITION. On appelle *groupe à un paramètre de difféomorphismes* un groupe à un paramètre de transformations qui sont des difféomorphismes, tel que $g^t x$ dépende différentiablement de t et de x.

EXEMPLE 1. $M = \mathbf{R}$, g^t est la multiplication par e^{kt}.

EXEMPLE 2. $M = \mathbf{R}^2$, g^t est une rotation d'angle t autour de 0.

REMARQUE. La condition de dépendance différentiable par rapport au temps t est nécessaire pour nous débarrasser des exemples pathologiques du genre suivant : soit $\{\alpha\}$ une base du groupe **R**, i.e. un ensemble de nombres réels α tel que chaque nombre réel se représente d'une seule façon par une combinaison linéaire finie des nombres α à coefficients entiers. Associons à chaque nombre α de la base une translation quelconque de la droite sans nous soucier des autres éléments de la base. En posant $g^{\alpha_1+\dots+\alpha_k} = g^{\alpha_1} \dots g^{\alpha_k}$, on obtient un groupe à un paramètre de transformations qui sont des translations de la droite et par suite, des difféomorphismes. Or en général g^t dépend de t non différentiablement et même discontinûment.

Au lieu de la différentiabilité par rapport à t, on aurait pu exiger seulement la continuité (qui entraîne la différentiabilité), mais nous n'en avons pas besoin.

DÉFINITION. On appelle *groupe à un paramètre de transformations linéaires* un groupe à un paramètre de difféomorphismes qui sont des transformations linéaires.

EXEMPLE 3. Sur le plan rapporté aux coordonnées (x, y), considérons la transformation $g^t(x, y) = (e^{\alpha t}x, e^{\beta t}y)$.

Il est clair que g^t est une transformation linéaire (durant t l'axe Ox se dilate de $e^{\alpha t}$ fois et l'axe y de $e^{\beta t}$ fois).

La propriété de groupe $g^{t+s} = g^t g^s$ résulte de la propriété de l'exponentielle $(e^{u+v} = e^u e^v)$, la dépendance différentiable par rapport à t est évidente aussi. Ainsi, $\{g^t\}$ est un groupe à un paramètre de transformations linéaires du plan.

Supposons en particulier que $\alpha = 1$ et $\beta = 2$ (fig. 46). Dans ce cas, les trajectoires sont le point fixe 0, les demi-axes de coordonnées, des demi-paraboles ; la figure 46 représente l'action d'une transformation du flot sur le domaine E. Les aires des domaines sont multipliées par e^{3t} par l'action de g^t.

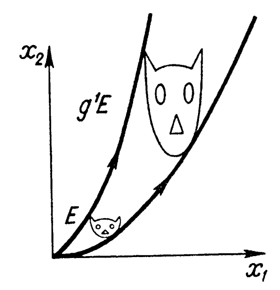


Fig. 46. Action d'un flot sur un domaine

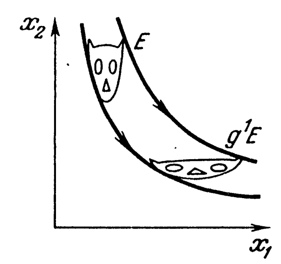


Fig. 47. Rotation hyperbolique

Considérons encore le cas $\alpha = 1, \beta = -1$ (fig. 47). La transformation g^t est alors composée d'une contraction de e^t fois dans le sens de l'axe y et d'une dilatation de e^t dans le sens de l'axe x. Une telle transformation s'appelle *rotation hyperbolique*, puisque les orbites du flot $\{g^t\}$ sont des demi-hyperboles xy = const (il est évident que la position d'équilibre 0 et

les demi-axes de coordonnées sont aussi des orbites). Les rotations hyperboliques conservent les aires bien qu'elles déforment fortement les figures (fig. 47).

A noter que notre groupe à un paramètre de transformations linéaires du plan se décompose en un «produit direct» de deux groupes à un paramètre de transformations linéaires de droites (plus exactement, en dilatations des axes).

EXERCICE 2. Tout groupe à un paramètre de transformations linéaires du plan est-il justiciable d'une telle décomposition ?

Nota. Envisager les rotations ou les translations $(x, y) \mapsto (x + ty, y)$.

4. Champ de vecteurs vitesses de phase. Soit $\{g^t\}$ un groupe à un paramètre de difféomorphismes d'un domaine M.

DÉFINITION. On appelle *vecteur vitesse de phase du flot* $\{g^t\}$ *en un point* x *de* M la vitesse animant le point $g^t x$ de à sa sortie x, i.e.

$$v(x) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (g^t x).$$

Les vecteurs vitesses de phase du flot $\{g^t\}$ en tous les points de M forment un champ de vecteurs différentiable (puisque $g^t x$ dépend différentiablement de t et de x). Ce champ s'appelle *champ de vecteurs vitesses de phase*.

EXERCICE 1. Trouver les champs de vitesses de phase des flots sur la droite $g^t x = x + t$, $e^t x$, $e^{-t} x$.

Réponse. $v(x) = 1, x, -x$.

EXERCICE 2. Les points fixes du flot sont points singuliers du champ de vecteurs vitesses de phase, i.e. le vecteur vitesse de phase s'annule en ces points. La réciproque est-elle vraie ?

Réponse. Oui. Cf. pt. 3 du § 2.

Fixons un point x_0 et étudions son mouvement sous l'action du flot $\{g^t\}$. En d'autres termes, considérons l'application $\varphi : \mathbf{R} \to M$ définie comme suit : $\varphi(t) = g^t x_0$.

THÉORÈME. *L'application* φ *est la solution de l'équation* $\dot{x} = v(x)$ *qui vérifie la condition initiale* $\varphi(0) = x_0$.

En d'autres termes, *sous l'action du flot le point représentatif se déplace de telle sorte que son vecteur vitesse soit égal, à chaque instant, au vecteur vitesse de phase du point de l'espace des phases où il se trouve.*

Démonstration. Ceci résulte de la propriété de groupe :

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=\tau} g^t x = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} g^{\tau+\varepsilon} x = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} g^{\varepsilon}(g^{\tau} x) = v(g^{\tau} x).$$

Donc, *à tout groupe à un paramètre de difféomorphismes est associée une équation différentielle* (définie par le champ de vecteurs vitesses de phase) ; les solutions de cette équation sont les mouvements des points représentatifs sous l'action du flot.

EXERCICE 3. La réciproque est-elle vraie, i.e. toute solution est-elle donnée par la formule $\varphi(t) = g^t x_0$?

Réponse. Oui, d'après le théorème d'unicité (§ 2, pt. 3).

Si un flot décrit un processus pour des conditions initiales arbitraires, l'équation différentielle, définie par son champ de vitesses de phase, décrit la *loi locale d'évolution de ce processus* ; la théorie des équations différentielles doit restituer le passé et prédire l'avenir à partir de cette loi d'évolution.

La formulation d'une quelconque loi de la nature sous forme d'une équation différentielle ramène tout problème d'évolution d'un processus (physique, chimique, écologique ou autre) à un problème de *géométrie* sur le comportement des orbites du champ de vecteurs envisagé dans l'espace des phases correspondant.

DÉFINITION. On appelle *flot d'une équation différentielle* $\dot{x} = v(x)$ le groupe à un paramètre de difféomorphismes pour lequel v est le champ de vecteurs vitesses de phase.

Pour trouver le flot de cette équation, il suffit de la résoudre : $g^t x_0$ est la valeur prise à l'instant t par la solution φ qui vérifie la condition initiale $\varphi(0) = x_0$.

EXEMPLES. Le flot de l'équation $\dot{x} = kx$ est le groupe $\{e^{kt}\}$. Le flot de l'équation des petites oscillations du pendule ($\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -x_1$) est composé des rotations d'angle t du plan. Le flot de l'équation des petites oscillations du pendule renversé ($\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = x_1$) est composé de rotations hyperboliques.

EXERCICE 4. Trouver les flots des équations différentielles :

$$\dot{x} = 0, \quad 1, \quad x - 1 \,; \quad \dot{x} = \sin x, \quad 0 < x < \pi.$$

Réponse. $g^t x = x, x + t, (x - 1)e^t + 1$; $2 \operatorname{Arc\,cotg} (e^{-t} \operatorname{cotg} x/2)$.

EXERCICE 5. Trouver les flots des systèmes :

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = 0 \,; \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = 1 \,; \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = \sin y, \\ \dot{y} = 0. \end{cases}$$

Réponse. $(x + ty, y), (x + ty + t^2/2, y + t), (x + t \sin y, y)$.

Il se pose la question de savoir si *tout champ de vecteurs différentiable est le champ de vecteurs vitesses de phase d'un flot.*

La réponse à cette question est négative.

EXEMPLE 1. Considérons l'équation différentielle $\dot{x} = 1$ dans l'espace des phases $0 < x < 1$. Il est évident que la transformation g^t ne peut être qu'une t-translation, mais pour $t \neq 0$ cette translation ne transforme pas l'espace des phases en lui-même.

EXEMPLE 2. Considérons le cas $v(x) = x^2, x \in \mathbf{R}$. On n'éprouve aucune difficulté à trouver explicitement la solution de l'équation $\dot{x} = v(x)$ qui vérifie la condition initiale x_0 pour $t = 0$:

$$dx/x^2 = dt, \ -1/x = t + C, \quad C = -1/x_0, x = x_0/(1 - x_0 t).$$

Ainsi, $g^t x = x/(1 - tx)$. Il est immédiat de vérifier que $g^{t+s} = g^t g^s$, de sorte qu'on a l'impression à première vue d'avoir trouvé le flot.

Malheureusement, l'application g^t n'est un difféomorphisme de la droite pour aucun t, sauf pour $t = 0$ (elle n'est même pas partout définie). Donc, *le champ $v(x) = x^2$ n'est le champ de vecteurs vitesses de phase d'aucun groupe à un paramètre de difféomorphismes de la droite.*

REMARQUE. Que les deux champs ci-dessus ne possèdent pas de flots tient à la non-compacité de l'espace des phases. Nous verrons dans la suite qu'un champ de vecteurs différentiable sur une variété compacte définit toujours un flot. En particulier le champ $v(x) = x^2$ défini sur la droite affine peut être prolongé en un champ différentiable défini sur la droite projective tout entière (y compris le point à l'infini). La droite projective est compacte (topologiquement c'est un cercle), et tout champ de vecteurs différentiable donné sur elle définit un flot. Les formules que nous avons établies pour les applications g^t décrivent précisément ce flot : g^t est un difféomorphisme de la droite projective mais pas de la droite affine !

EXERCICE 6. Montrer que tout champ de vecteurs différentiable sur la droite, croissant à l'infini pas plus vite qu'un champ linéaire ($|v(x)| \leqslant a + b|x|$) est le champ de vecteurs vitesses de phase d'un groupe à un paramètre de difféomorphismes de la droite.

Nota. En comparant le mouvement à un plus rapide dans un champ de vecteurs linéaire convenable, montrer que la solution ne peut s'éloigner à l'infini en un temps fini et par suite se prolonge à l'axe t tout entier.

EXERCICE 7. L'équation $\dot{x} = e^x \sin x$ définit-elle un flot sur la droite ?

Réponse. Oui.

EXERCICE 8. Considérons l'espace vectoriel de tous les polynômes p de x de degré $< n$. Définissons une transformation dans le temps t comme une t-translation de la variable de p (i.e. $(g^t p)(x) \equiv p(x + t)$). Montrer que $\{g^t\}$ est un groupe à un paramètre de transformations linéaires et trouver son champ de vecteurs vitesses de phase.

Réponse. Le vecteur du champ au point p est le polynôme dp/dx.

§ 5. Action des difféomorphismes sur les champs de vecteurs et les champs de directions

La principale méthode de résolution et d'étude des équations différentielles consiste à trouver un changement de variables convenable, c'est-à-dire, en termes géométriques, à trouver un difféomorphisme convenable susceptible de simplifier le champ de vecteurs ou de directions donné. Nous donnons ici les définitions formelles des notions nécessaires. Commençons par un rappel de certaines notions élémentaires de calcul différentiel.

1. Action des applications différentiables sur les vecteurs. L'étude des divers objets mathématiques doit être menée de pair avec celle des applications *). Rappelons la définition de l'action des applications différentiables sur les vecteurs.

Soit $f : M \to N$ une application différentiable d'un domaine M (appelé *domaine source*) d'un espace vectoriel dans un domaine N (*domaine but*) d'un autre espace vectoriel et soit $\boldsymbol{v}$ un vecteur appliqué en un point x du domaine source M, i.e. une flèche d'origine x (fig. 48). L'image $f(x)$ dans le domaine N est alors le point d'application d'un vecteur noté $f_{*x}\boldsymbol{v}$ et appelé *image du vecteur* $\boldsymbol{v}$ *par l'application* f. Plus exactement on a la

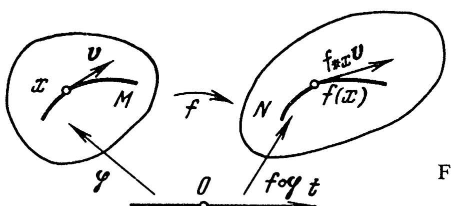


Fig. 48. Action d'une application différentiable sur un vecteur

DÉFINITION. On appelle *image du vecteur* $\boldsymbol{v}$ *par l'application* f le vecteur vitesse du point mobile $f(\varphi(t))$ en $f(x)$ lorsque le point mobile $\varphi(t)$ est animé en x de la vitesse $\boldsymbol{v}$:

$$f_{*x}\boldsymbol{v} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f(\varphi(t)), \quad \text{où} \quad \varphi(0) = x, \quad \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \varphi(t) = \boldsymbol{v}. \tag{1}$$

En d'autres termes, la flèche $\boldsymbol{v}$ diminue de 1 000 fois, puis est incurvée par f, ensuite allongée de 1 000 fois et enfin tend vers l'infini.

---

*) Ceci est le point de vue « catégoriel ». Vulgairement, une catégorie est un ensemble d'objets et d'applications (exemple : la catégorie de tous les espaces vectoriels et de leurs applications linéaires).

EXERCICE 1. Montrer que l'image du vecteur $\boldsymbol{v}$ ne dépend pas du choix du mouvement φ, pourvu que le point $\varphi(t)$ soit animé de la vitesse $\boldsymbol{v}$ en x.

Solution. Soit ψ un autre mouvement possédant la même vitesse en x. La distance des points $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ est alors $o(|t|)$ pour $|t|$ petit. L'application f étant différentiable, la distance des images $f(\varphi(t))$ et $f(\psi(t))$ dans N est $o(|t|)$. Ce qu'on voulait.

EXERCICE 2. Soit v un vecteur unité de la droite, orienté dans le sens positif et appliqué en un point a et soit $f(x) = x^2$. Trouver $f_{*a}\boldsymbol{v}$.

Réponse. Le produit de $2a$ par le vecteur unité appliqué en a.

EXERCICE 3. Deux points du plan se déplaçant sur des axes de coordonnées différents peuvent-ils être animés de la même vitesse en l'origine ?

Réponse. Oui, si la vitesse est nulle. Exemple : $\varphi(t) = (t^2, 0)$, $\psi(t) = (0, t^2)$.

Les vecteurs vitesses des mouvements issus d'un point x de M forment un espace vectoriel : l'espace des vecteurs appliqués en x. Cet espace qui est de même dimension que M s'appelle *espace tangent en x* à M et se note T_xM.

Tout lecteur rencontrant cet être mathématique pour la première fois aura de la peine à dissocier l'espace tangent de l'espace vectoriel. La généralisation suivante est appelée à l'aider à surmonter cette difficulté. Considérons une surface différentiable quelconque M de $\mathbf{R}^3$, par exemple une sphère. Les vecteurs vitesses du point courant en un point donné de la sphère forment visiblement un plan (un espace à deux dimensions, tangent à la sphère en un point x donné) ; ce plan tangent T_xM (fig. 49) est manifestement séparé de la sphère M.

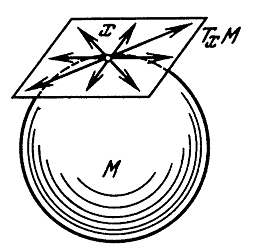


Fig. 49. Espace tangent

L'application f_{*x} envoie l'espace tangent en x au domaine source M dans l'espace tangent en $f(x)$ au domaine but.

EXERCICE 4. Montrer que l'application $f_{*x} : T_xM \to T_{f(x)}N$ est linéaire.

Solution. D'après la formule de Taylor,

$$f(x + vt) = f(x) + (\partial f/\partial x)\, vt + o(|t|),$$

donc, $f_{*x} = \partial f/\partial x$ est un opérateur linéaire.

Si les espaces source et but sont rapportés respectivement aux systèmes de coordonnées cartésiennes $(x_1, \ldots, x_m)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$, de sorte que l'application f est définie par une famille de n fonctions f_i de m variables x_j, alors les composantes du vecteur $f_{*x}\boldsymbol{v}$ s'expriment en fonction de celles du

vecteur v par la formule :

$$(f_{*x}v)_i = \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} v_j .$$

Autrement dit, *la matrice de l'opérateur* f_{*x} *est composée des dérivées partielles* $(\partial f_i / \partial x_j)$.

DÉFINITION. L'opérateur linéaire f_{*x} s'appelle *dérivée de l'application* f au point x.

EXERCICE 5. Soit $f(x) = (\sin x, \cos x)$ une application de la droite dans le plan. Calculer la valeur prise par sa dérivée sur un vecteur v orientant l'axe x dans le sens positif, de longueur 10, appliqué en un point α.

Réponse : $f_{*\alpha} v = (10 \cos \alpha, - 10 \sin \alpha)$.

EXERCICE 6. Soit $f(x_1, x_2) = (x_1^3 + x_1 x_2, x_2)$ une application du plan (x_1, x_2) dans un autre (fig. 50). Trouver l'ensemble de tous les points x en lesquels dégénère l'opérateur linéaire f_{*x} et trouver l'image de cet ensemble par l'application f (ces deux ensembles s'appellent respectivement ensembles des *points critiques* et des *valeurs critiques*).

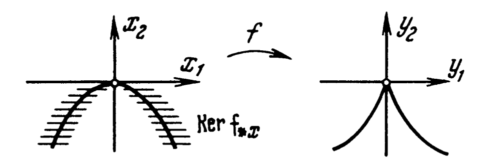


Fig. 50. Points critiques et valeurs critiques de l'application de Whitney

Solution. La matrice de l'opérateur est de la forme

$$\begin{pmatrix} 3x_1^2 + x_2 & x_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donc, la dérivée est dégénérée sur la parabole $x_2 = -3x_1^2$. Son image est la parabole semi-cubique $(y_1/2)^2 + (y_2/3)^3 = 0$.

L'application de cet exercice s'appelle *application de Whitney* (*fronce*). Whitney a démontré que la fronce est caractéristique des applications différentiables d'un plan dans un autre (par exemple, toute application différentiable voisine de f admet une telle singularité au voisinage de l'origine des coordonnées).

REMARQUE. La structure vectorielle (i.e. l'addition des vecteurs) de l'espace tangent en x au domaine M est définie plus haut à l'aide de celle de l'espace ambiant à M, ou en d'autres termes à l'aide du système de coordonnées cartésiennes.

En réalité, aussi bien l'ensemble T_xM que la structure d'espace vectoriel dont il est muni, peuvent être définis indépendamment du choix du système de coordonnées, même curvilignes, pourvu que ce système soit admissible, c'est-à-dire lié au système de coordonnées cartésiennes par un changement de variables différentiable (un difféomorphisme). L'indépendance de l'espace tangent par rapport au système de coordonnées n'est pas tout à fait évidente, puisque la flèche (le vecteur appliqué) représenté dans le domaine M s'incurve par un difféomorphisme.

La définition intrinsèque (i.e. indépendante du système de coordonnées) du vecteur vitesse en x est assez abstraite :

DÉFINITION. On appelle *vecteur tangent* en x à M la classe d'équivalence des mouvements différentiables $\varphi : \mathbf{R} \to M$ tels que $\varphi(0) = x$; l'équivalence $\varphi \sim \psi$ est définie par la condition : la distance des points $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ dans un (donc, dans tout) système de coordonnées est $o(|t|)$ lorsque $t \to 0$ (fig. 51).

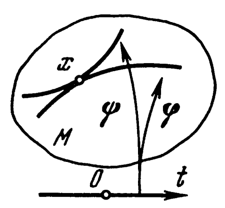


Fig. 51. Classe de mouvements équivalents

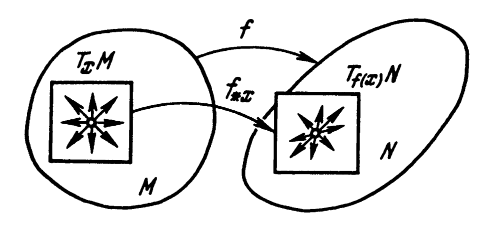


Fig. 52. Dérivée d'une application en un point

Il est clair que c'est bien une relation d'équivalence ($\varphi \sim \varphi$, $\varphi \sim \psi \Rightarrow \psi \sim \varphi$, $\varphi \sim \psi \sim \chi \Rightarrow \Rightarrow \varphi \sim \chi$). La classe d'équivalence du mouvement φ est définie (dans un système de coordonnées fixe) par les composantes du vecteur vitesse de $\varphi(t)$ au point $\varphi(0)$.

Donc, un vecteur défini intrinsèquement se transforme en une flèche ordinaire dès que le système de coordonnées est fixé. La seule chose à démontrer est l'indépendance des opérations linéaires sur les vecteurs (addition et multiplication par des nombres) par rapport au système de coordonnées participant à leur définition. Or cette indépendance résulte directement de la linéarité de l'opérateur de dérivation de l'application en un point (à titre d'application il faut envisager un « changement de variables », c'est-à-dire un difféomorphisme associant à l'ensemble des anciennes coordonnées d'un point l'ensemble de ses nouvelles coordonnées).

Bien que notre définition soit indépendante du système de coordonnées, il reste encore la dépendance par rapport à la classe de tous les systèmes de coordonnées admissibles reliés par des changements de variables différentiables. Cette classe s'appelle *structure différentiable* et les notions introduites en dépendent essentiellement.

La dérivée de l'application f en x est un opérateur linéaire $f_{*x} : T_x M \to T_{f(x)} N$ qui, de par sa définition (1), ***ne dépend ni du système de coordonnées du domaine source, ni de celui du domaine but*** (fig. 52).

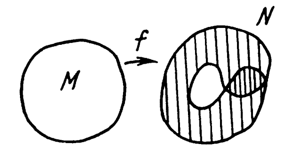


Fig. 53. Un difféomorphisme local peut ne pas être global

EXERCICE 7. Soit f un difféomorphisme de M sur N. Montrer que l'application f_{*x} : $T_x M \to T_{f(x)} N$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

EXERCICE 8. La réciproque est-elle vraie ?

Réponse. Non, même si f_x est un isomorphisme pour tout x (fig. 53).

2. Action des difféomorphismes sur les champs de vecteurs.

DÉFINITION. On dit qu'un *champ de vecteurs* $\boldsymbol{v}$ est défini sur un domaine M si à chaque point x de M est associé un vecteur $\boldsymbol{v}(x) \in T_x M$ appliqué en x et dépendant différentiablement de x (si l'on a fait choix d'un système de m coordonnées, ce champ est défini par ses m composantes qui sont des fonctions différentiables de m variables). Le vecteur $\boldsymbol{v}(x)$ s'appelle *valeur* du champ $\boldsymbol{v}$ au point x.

Voyons comment se comportent certains objets par des applications différentiables. Les *vecteurs tangents avancent* par les applications $g : M \to N$ (i.e. g envoie un vecteur $\boldsymbol{v}$ tangent au domaine source M dans un vecteur $g_{*x}\boldsymbol{v}$ tangent au domaine but N). Les *fonctions reculent* par les applications $g : M \to N$, i.e. une fonction f sur N engendre une fonction sur M (sa valeur en $x \in M$ est égale à celle de f en l'image de x ; cette fonction est désignée par $g^* f$; l'astérisque en indice supérieur symbolise le mouvement en arrière).

En général, les champs de vecteurs n'avancent ni ne reculent. En effet, deux points du domaine source peuvent être envoyés en un point qui sera l'origine de vecteurs différents (transportés du domaine source), donc le champ source n'est envoyé dans aucun champ but. En outre, de nombreux vecteurs tangents au domaine source en un même point peuvent avoir une image commune, donc un champ sur le domaine but n'est envoyé dans aucun champ sur le domaine source.

DÉFINITION. On appelle *image d'un champ de vecteurs par un difféomorphisme* un champ de vecteurs dont la valeur en chaque point est l'image du vecteur du champ source appliqué en l'antécédent de ce point. L'image d'un champ $\boldsymbol{v}$ par un difféomorphisme g est désignée par $g_* \boldsymbol{v}$.

Autrement dit, l'image $g_* \boldsymbol{v}$ d'un champ $\boldsymbol{v}$ sur M par un difféomorphisme g de M sur N est un champ $\boldsymbol{w}$ sur N défini par la formule $\boldsymbol{w}(y) = (g_{*x})\boldsymbol{v}(x)$, où $x = g^{-1}y$ (fig. 54).

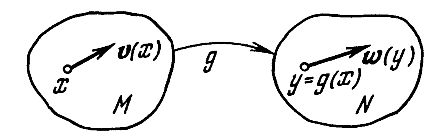


Fig. 54. Action d'un difféomorphisme sur un champ de vecteurs

EXERCICE 1. Trouver l'image du champ $v(x) = 1$ sur la droite par le difféomorphisme $g(x) = 2x$.

Réponse. $(g_* v)(y) = 2$.

Un champ de vecteurs sur l'axe x dont l'unique composante est égale à $\boldsymbol{v}$ est souvent désigné *) par le symbole $\boldsymbol{v}\partial/\partial x$. La commodité de cette notation réside dans le fait que $\partial/\partial x$ se conduit comme $1/x$ par une dilatation de l'axe x. Par exemple, la solution de l'exercice précédent peut s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial(y/2)} = 2\frac{\partial}{\partial y}.$$

Dans ces notations, la formule de l'action d'un difféomorphisme de la droite sur un champ de vecteurs se transforme en la formule de changement de variable suivante : si $y = g(x)$, alors

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial(g(x))} = \frac{1}{g'}\frac{\partial}{\partial x}.$$

Donc, la notation $\partial/\partial x$ automatise le calcul de l'action des difféomorphismes sur les champs.

EXERCICE 2. Trouver l'image du champ $x\partial/\partial x$ par le difféomorphisme $y = e^x$.
Réponse. $y \ln y\partial/\partial y$.

Si $\mathbf{R}^n$ est rapporté à un système de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$, les champs de vecteurs de base (i.e. de composantes $(1, 0, \dots, 0), (0, \dots, 0, 1)$) sont désignés par $\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n$. Le champ de composantes $(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n)$ est donc désigné par $\boldsymbol{v}_1\partial/\partial x_1 + \dots + \boldsymbol{v}_n\partial/\partial x_n$.

EXERCICE 3. Trouver les images du «champ d'Euler» $\boldsymbol{v} = x_1\partial/\partial x_1 + x_2\partial/\partial x_2$ sur le plan par les difféomorphismes suivants : 1) une rotation autour de 0 ; 2) une rotation hyperbolique ; 3) une transformation linéaire quelconque.
Réponse. v.

EXERCICE 4. Montrer que si un difféomorphisme transforme un champ de vecteurs $\boldsymbol{v}$ en un champ de vecteurs w, il transformera les orbites de $\boldsymbol{v}$ en celles de w. La réciproque est-elle vraie ?
Réponse. Non, exemple : $v = x\partial/\partial x$, $w = 2x\partial/\partial x$.

3. Changement de variables dans une équation. Soit w l'image d'un champ de vecteurs v sur M par un difféomorphisme g de M sur N, i.e. $w = g_* v$.

THÉORÈME. *Les équations différentielles*

$$\dot{x} = v(x), \quad x \in M \tag{1}$$

et

$$\dot{y} = w(y), \quad y \in N \tag{2}$$

*) En fait, $v\partial/\partial x$ est un opérateur de dérivation suivant la direction du champ $\boldsymbol{v}$ (cf. § 10), mais comme l'opérateur $v\partial/\partial x$ et le champ $\boldsymbol{v}$ se définissent mutuellement de façon unique, ils sont souvent identifiés.

sont équivalentes en ce sens que si $\varphi : I \to M$ est une solution de la première, $g \circ \varphi : I \to N$ sera solution de la seconde et réciproquement.

En d'autres termes, *le changement de variables $y = g(x)$ transforme l'équation* (1) *en l'équation* (2). Ou encore : *la substitution de $g(x)$ à y transforme l'équation* (2) *en l'équation* (1).

Démonstration. C'est l'évidence même. En d'autres termes, en appliquant successivement la règle de dérivation d'une fonction composée, la définition de la solution φ et la définition du champ $g_* v$ on trouve que $\frac{d}{dt} g \circ \varphi = g_{*x}\dot\varphi(t) = g_{*x}v(x) = w(y)$, où $x = \varphi(t)$, $y = g(\varphi(t))$. C.Q.F.D.

EXERCICE 1. Intégrer l'équation des petites oscillations du pendule

$$\dot x_1 = x_2, \quad \dot x_2 = -x_1,$$

en passant aux coordonnés polaires *) par la substitution $x_1 = r \cos \theta, x_2 = r \sin \theta$.

Solution. Cette substitution nous donne $\dot r = 0, \dot\theta = -1$, d'où $x_1 = r_0 \cos(\theta_0 - t)$, $x_2 = r_0 \sin(\theta_0 - t)$.

EXERCICE 2. Etudier les orbites du système

$$\begin{cases} \dot x_1 = x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2), \\ \dot x_2 = -x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2). \end{cases}$$

Solution. En passant aux coordonnées polaires, on obtient

$$\dot r = r(1 - r^2), \quad \dot\theta = -1.$$

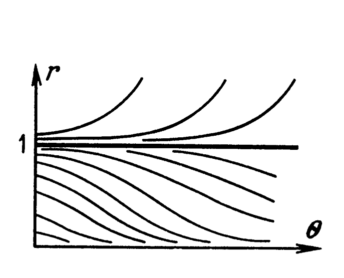


Fig. 55. Courbes intégrales sur le plan (r, θ)

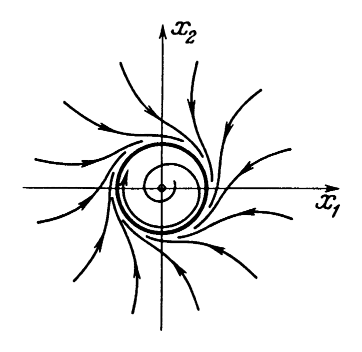


Fig. 56. Orbites sur le plan (x_1, x_2)

*) Bien entendu, sous les restrictions usuelles dues à la non-univocité des coordonnées polaires : l'application $(r, \theta) \mapsto (x_1, x_2)$ n'est pas un difféomorphisme d'un plan sur un plan. On peut par exemple considérer le difféomorphisme défini par cette application du domaine $r > 0$, $0 < \theta < 2\pi$ sur le plan privé du demi-axe positif x_1 et séparément du domaine $-\pi < \theta < \pi$ sur le plan privé du demi-axe négatif x_1.

Sur le plan (r, θ), les orbites de ce système sont confondues avec les courbes intégrales de l'équation $dr/d\theta = r(r^2 - 1)$. En traçant ces orbites (fig. 55) et en revenant aux coordonnées cartésiennes, on obtient la figure 56. L'unique point singulier est l'origine des coordonnées. Les orbites nées au voisinage de l'origine s'enroulent sur le cercle $x_1^2 + x_2^2 = 1$ de l'intérieur lorsque le temps croît. Ce cercle est une orbite fermée (un cycle limite). Les orbites s'enroulent aussi sur lui de l'extérieur.

Le passage aux coordonnées polaires permet aussi d'intégrer explicitement le système initial.

4. Action d'un difféomorphisme sur un champ de directions. Soit g un difféomorphisme de M sur N et soit donné un champ de directions sur M. Ce difféomorphisme engendre un champ de directions sur N, appelé *image du champ initial par* g, qui se définit comme suit.

Soit y un point quelconque de N (fig. 57). Il admet une seule contre-image $x = g^{-1}y$ sur M. Considérons la direction du champ en x. C'est une droite de l'espace tangent T_xM. Prenons un vecteur quelconque non nul de cette droite. Son image par g est un vecteur non nul de l'espace tangent T_yN (puisque g est un difféomorphisme). La droite définie par ce vecteur ne dépend pas du choix du vecteur de la droite initiale (puisque g_{*x} est un opérateur linéaire). Cette nouvelle droite est une droite du nouveau champ de directions en y. On a de toute évidence le

THÉORÈME. *Les courbes intégrales du champ de directions initial sur M se transforment par le difféomorphisme g : M → N en courbes intégrales du champ de directions sur N, image par g du champ initial.*

Pour prouver ce théorème il suffit de prolonger le champ de directions initial (au voisinage de chaque point du domaine M) en un champ dont les vecteurs sont non nuls et sont portés par les droites du champ de directions initial et d'appliquer ensuite le théorème du pt. 3.

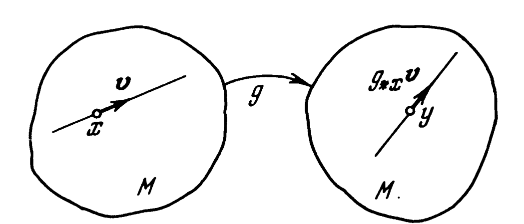
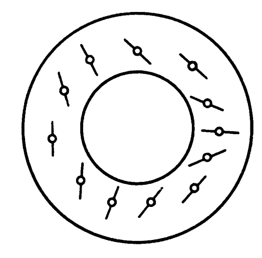



Fig. 57. Action d'un difféomorphisme sur le champ de directions


Fig. 58. Champ de directions non prolongeable à un champ de vecteurs

EXERCICE 1. Peut-on prolonger tout champ de directions différentiable sur un domaine d'un plan en un champ de vecteurs différentiable ?

Réponse. Non, si le domaine n'est pas simplement connexe (fig. 58).

Le théorème formulé ci-dessus montre que pour intégrer l'équation différentielle

$$dx/dt = v(t, x)$$

il suffit de construire un difféomorphisme transformant le champ de directions initial en champ de directions d'une équation que nous savons déjà résoudre, par exemple une équation à variables séparables. En d'autres termes, il suffit de choisir un changement de variables qui ramène l'équation donnée à une équation déjà résolue.

EXERCICE 2. Trouver un changement de variables qui transforme l'équation $\frac{dx}{dt} = \frac{x^2 - t^2}{x^2 + t^2}$ en équation à variables séparables.

Réponse. Prendre des coordonnées polaires.

EXERCICE 3. Trouver un difféomorphisme transformant toutes les courbes intégrales de l'équation $dx/dt = x - 1$ en droites parallèles.

Solution. La solution de l'équation homogène est $x = Ce^t$. Trouvons une solution particulière de l'équation non homogène : $\dot{C}e^t = -1$, $C = e^{-t}$, $x = 1$.

Donc, toute solution de l'équation non homogène est de la forme : $x = 1 + ae^t$. L'application qui à (t, x) associe (t, a) est le difféomorphisme cherché ($a = e^{-t}(x - 1)$), puisque a est une constante le long des courbes intégrales.

Autre solution. Associons au point (t, x) le point (t, y), où y est l'ordonnée du point d'intersection de la courbe intégrale passant par (t, x) avec l'axe des ordonnées (fig. 59).

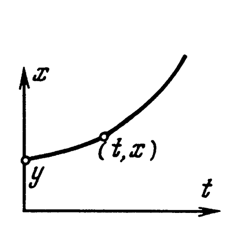


Fig. 59. Redressement des courbes intégrales

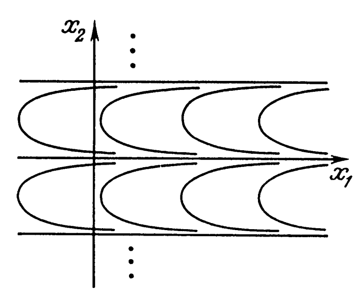


Fig. 60. Champ de directions non redressable

EXERCICE 4. Tout champ de directions différentiable défini sur le plan tout entier se transforme-t-il en un champ de droites parallèles par un difféomorphisme convenable ?

Réponse. Non, cf. fig. 60.

EXERCICE 5. Peut-on transformer le champ de directions de l'équation $\dot{x} = x^2$ en un champ de droites parallèles par un difféomorphisme du plan ?

Réponse. Oui, bien que la formule explicite soit difficile à établir.

5. Action d'un difféomorphisme sur un flot. Soit $\{g^t : M \to M\}$ un groupe à un paramètre de difféomorphismes et soit $f : M \to N$ un autre difféomorphisme.

Définition. On appelle *image du flot* $\{g^t\}$ *par le difféomorphisme* f le flot $\{h^t : N \to N\}$, où $h^t = fg^tf^{-1}$.

En d'autres termes, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{g^t} & M \\ f\downarrow & & \downarrow f \\ N & \xrightarrow{h^t} & N \end{array}$$

est commutatif pour tout t. Il est clair que f envoie les orbites du groupe $\{g^t\}$ dans celles du groupe $\{h^t\}$.

Si l'on traite le difféomorphisme f comme un « changement de variables », la transformation h^t est tout simplement la transformation g^t «écrite dans les nouvelles coordonnées».

Remarque. Les flots $\{g^t\}$ et $\{h^t\}$ sont appelés parfois *équivalents* (ou *semblables* ou *conjugués*) et le difféomorphisme f *équivalence* (ou *similitude* ou *difféomorphisme conjuguant*).

Exercice 1. Montrer que $\{h^t\}$ est un groupe à un paramètre de difféomorphismes.

Exercice 2. Les groupes à un paramètre de rotations du plan et de rotations hyperboliques du plan sont-ils semblables ?

Soient $\boldsymbol{v}$ le champ de vecteurs vitesses de phase du groupe à un paramètre $\{g^t\}$ et $\boldsymbol{w}$, celui du groupe $\{h^t\}$, image de $\{g^t\}$ par f.

On a de toute évidence le

Théorème. *Le difféomorphisme f envoie le champ $\boldsymbol{v}$ dans $\boldsymbol{w}$; réciproquement, si un difféomorphisme envoie $\boldsymbol{v}$ dans $\boldsymbol{w}$, il envoie $\{g^t\}$ dans $\{h^t\}$.*

Exercice 3. Les champs de vecteurs sur la droite qui définissent les cinq équations suivantes : $\dot{x} = \sin x$, $2 \sin x$, $\sin^2 x$, $\sin 2x$, $2 \sin x + \sin^2 x$ se transforment-ils l'un en l'autre par des difféomorphismes ?

Réponse. Le deuxième se transforme en le quatrième et le cinquième.

§ 6. Symétrie

On étudie ici les équations différentielles homogènes et quasi homogènes. Leur intégration fait intervenir les groupes à un paramètre de symétries des champs de vecteurs et des champs de directions. Commençons par l'étude de ces groupes.

1. Groupes de symétries.

Définition. Un difféomorphisme $g : M \to M$ s'appelle *symétrie* d'un champ de vecteurs $\boldsymbol{v}$ sur M s'il envoie $\boldsymbol{v}$ dans lui-même : $g_*\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$. On dit aussi que *le champ $\boldsymbol{v}$ est invariant par la symétrie g.*

Exemple 1. La rotation du plan autour de 0 est une symétrie du champ d'Euler $x_1\partial/\partial x_1 + x_2\partial/\partial x_2$ (dont le vecteur en $\boldsymbol{x}$ est $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$, fig. 61).

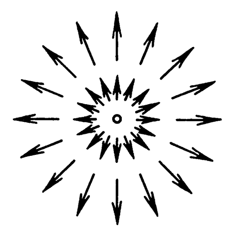


Fig. 61. Champ d'Euler

Les orbites de ce champ se transforment l'une en l'autre par une symétrie du champ.

EXERCICE 1. Peut-on dire d'un difféomorphisme envoyant les orbites d'un champ de vecteurs dans elles-mêmes qu'il est une symétrie de ce champ ?
Réponse. Pas nécessairement.

DÉFINITION. Un difféomorphisme $g : M \to M$ s'appelle *symétrie d'un champ de directions sur M* s'il envoie ce champ dans lui-même ; le champ est dit alors *invariant* par cette symétrie. Les courbes intégrales du champ sont associées l'une à l'autre par cette symétrie.

EXEMPLE 2. Le champ de directions de l'équation $\dot{x} = v(t)$ dans l'espace des phases élargi est invariant par les translations le long de l'axe x (fig. 4, page 15), celui de l'équation $\dot{x} = v(x)$, par les translations le long de l'axe t (fig. 6, page 17).

EXERCICE 2. Peut-on dire d'un difféomorphisme transformant les courbes intégrales d'un champ de directions en elles-mêmes qu'il est une symétrie de ce champ ?
Réponse. Oui.

Un champ est dit *invariant par un groupe* de difféomorphismes s'il l'est par chaque transformation du groupe. On dit alors que ce champ *admet* ce groupe pour groupe de symétries.

EXEMPLE 3. Le champ d'Euler sur le plan admet, entre autres, les quatre groupes de symétries suivants : le groupe à un paramètre des homothéties ($x \mapsto e^t x$), le groupe à un paramètre des rotations d'angle t, le groupe à un paramètre des rotations hyperboliques, le groupe $GL(2, \mathbf{R})$ des transformations linéaires du plan.

Les symétries de ce champ forment un groupe (prouvez-le !).

EXERCICE 3. Trouver le groupe des symétries du champ d'Euler sur le plan.
Réponse. $GL(2, \mathbf{R})$.

2. Application d'un groupe à un paramètre de symétries à l'intégration d'une équation.

THÉORÈME. *Si l'on connaît le groupe à un paramètre de symétries d'un champ de directions sur le plan, on peut intégrer explicitement l'équation*

définie par ce champ au voisinage de chaque point non stationnaire du groupe de symétries.

On dit qu'un point est *non stationnaire* pour un groupe de transformations s'il est invariant par une partie seulement de ces transformations.

Si ce groupe est composé de translations le long d'une droite, l'équation associée à un tel groupe de symétries a été intégrée au § 1, page 17 (formule de Barrow). On démontrera que le cas général se ramène à celui-là par un difféomorphisme convenable (i.e. par un choix convenable de coordonnées locales sur le plan).

LEMME. *Au voisinage de tout point non stationnaire pour un groupe à un paramètre de difféomorphismes du plan, on peut choisir des coordonnées* (u, v) *telles que ce groupe de difféomorphismes prenne la forme d'un groupe de translations :*

$$g^s(u, v) = (u + s, v) \quad \textit{pour } |u|, |v| \textit{ et } |s| \textit{ assez petits.}$$

Cette formule exprime que la coordonnée v numérote les orbites de ce groupe et que la coordonnée u sur chaque orbite est tout simplement la durée du mouvement (mesurée à partir d'une certaine ligne du plan).

Démonstration. Menons par un point donné O une ligne Γ coupant transversalement (sous un angle non nul) l'orbite $\{g^s O\}$ passant par O (fig. 62). Soit v la coordonnée du point $\gamma(v)$ de cette ligne, mesurée à partir de O. Considérons l'application Φ du plan (u, v) sur notre plan, qui associe au point de coordonnées (u, v) le point $g^u\gamma(v)$. Cette application est un difféomorphisme d'un voisinage du point (0, 0) sur un voisinage du point O. Donc, (u, v) sont des coordonnées locales. Dans les coordonnées (u, v) le difféomorphisme g^s prend la forme voulue, puisque $g^s g^u = g^{s+u}$.

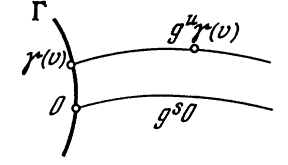


Fig. 62. Redressement d'un groupe à un paramètre de difféomorphismes

Le théorème découle du lemme, puisque dans le système de coordonnées (u, v) la pente du champ de directions envisagé est indépendante du u.

REMARQUE. Cette démonstration nous fournit aussi une *méthode d'intégration explicite* de l'équation ; dans les coordonnées du lemme, elle est de la forme $dv/du = w(v)$ (la courbe Γ ne doit pas être tangente à la direction du champ en O). En pratique ces coordonnées ne sont pas toujours d'un usage commode. Il suffit que les lignes $v =$ const soient les orbites du groupe à un paramètre de difféomorphismes considéré ; pour la deuxième

coordonnée, au lieu de u, on peut prendre toute fonction de u, par exemple z. L'important c'est que les transformations g^s envoient les lignes $z = \text{const}$ l'une dans l'autre. Dans le système de coordonnées (z, v), le champ de directions initial définit une équation à variables séparables : $dv/dz = w(v)f(z)$, où $f(z) = du/dz$.

EXERCICE. Soit connu le groupe à un paramètre de symétries d'un champ de directions dans un domaine à n dimensions. Ramener l'intégration de l'équation différentielle correspondante à la détermination des courbes intégrales d'un champ de directions dans un domaine à $n - 1$ dimensions.

Nota. L'espace des orbites du groupe de symétries est à $n - 1$ dimensions.

3. Equations homogènes.

DÉFINITION. On dit qu'une équation est *homogène* si le champ de directions qui la définit sur le plan est homogène, i.e. invariant par le groupe à un paramètre des homothéties $g^s(x, y) = e^s(x, y)$ (fig. 63).

Un tel champ n'est pas nécessairement défini sur le plan tout entier : il suffit qu'il le soit sur un domaine quelconque invariant par le groupe des homothéties (par exemple, sur un angle).

EXERCICE 1. Lesquelles des équations $dy/dx = y/x, x/y, \ln x - \ln y$ $(x > 0, y > 0)$ sont homogènes ?

Réponse. Toutes les trois.

THÉORÈME 1. *L'équation homogène* $dy/dx = F(x, y)$ *se ramène à une équation à variables séparables par la substitution* $y = vx$ (*i.e. par un passage aux coordonnées* (x, v)) *dans le domaine* $x > 0$.

Démonstration. Les orbites du groupe des homothéties sont des demi-droites d'origine 0 (fig. 64). Pour Γ on peut prendre la droite $x = 1$

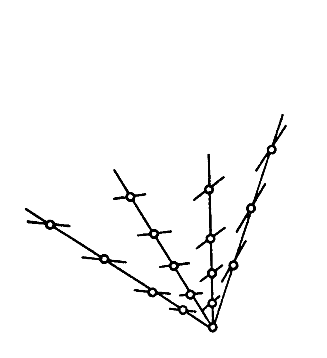


Fig. 63. Champ de directions d'une équation homogène

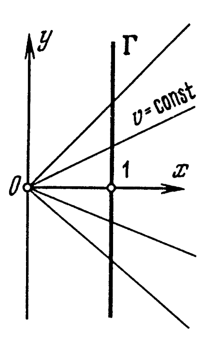


Fig. 64. Coordonnées pour la solution de l'équation homogène

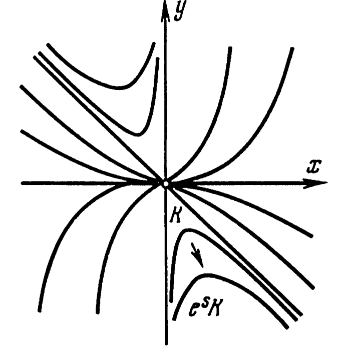


Fig. 65. Courbes intégrales de l'équation homogène

paramétrée par y. Les coordonnées indiquées dans le lemme sont ici $u = \ln x$ et $v = y/x$.

D'après la remarque du point 2 les variables sont séparables dans le système de coordonnées (x, v).

EXERCICE 2. Intégrer l'équation $dy/dx = y/x + y^2/x^2, x > 0$.

Solution. $dy = v\,dx + x\,dv$, $dy/dx = v + x\,dv/dx, x\,dv/dx = v^2$, $-1/v = \ln x + C$, $y = -x/(\ln x + C)$.

Si K est une courbe intégrale d'une équation homogène, il en est de même de la courbe homothétique $e^s K$ (fig. 65). Donc, pour étudier toutes les courbes intégrales d'une équation homogène, il suffit de tracer une seule courbe dans chaque secteur du plan.

EXERCICE 3. Tracer les courbes intégrales de l'équation

$$dy/dx = 2y/x + y^2/x^2.$$

Réponse. Cf. fig. 65.

DÉFINITION. Une fonction f est ***homogène de degré r*** si elle satisfait à l'identité

$$f(e^s x) \equiv e^{rs} f(x). \tag{1}$$

En d'autres termes, une *fonction homogène de degré r* est le vecteur propre commun de tous les opérateurs linéaires $(e^s)^*$, associé aux valeurs propres e^{rs}.

L'opérateur g^* (l'action du difféomorphisme g sur des fonctions) est défini au § 5, page 68.

EXEMPLE. Traçons la droite $p + q = r$ sur le plan (p, q). Un polynôme $\sum a_{p,q} x^p y^q$ est homogène de degré r si et seulement si les exposants de tous les monômes à coefficients non nuls sont situés sur cette droite (appelée *diagramme de Newton*).

THÉORÈME 2 (Euler). *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction f soit homogène de degré r est qu'elle satisfasse à la relation* d'Euler $\sum x_i \partial f/\partial x_i = rf$.

La relation d'Euler exprime que f est le vecteur propre de l'opérateur de dérivation le long du champ d'Euler représenté sur la figure 61 (le champ de vecteurs vitesses de phase du groupe des homothéties de rapport e^s) associé à la valeur propre r.

Démonstration. La relation d'Euler s'obtient par dérivation de la définition (1) par rapport à s pour $s = 0$. La relation (1) se déduit de la relation d'Euler par intégration de l'équation différentielle à variables séparables définie par la relation d'Euler sur chaque orbite du groupe des homothéties : $df/dx = rf/x$.

Pour que le champ de directions de l'équation $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = F(x, y)$ *soit homogène, il est nécessaire et suffisant que le second membre soit une fonction homogène de degré* 0. (Par exemple, le rapport de deux polynômes homogènes de même degré.)

REMARQUE. Le passage des coordonnées (x, y) aux coordonnées $(x, v = y/x)$ dans le domaine $x \neq 0$ et aux coordonnées $(u = x/y, y)$ dans le domaine $y \neq 0$ s'appelle *sigma-processus* ou *éclatement du point* 0.

Cette construction admet une interprétation géométrique simple : elle traduit le passage du plan à la surface obtenue en extirpant l'origine des coordonnées du plan et en collant à sa place la droite projective tout entière. Voici la procédure : considérons une application (un fibré) $\alpha : (\mathbf{R}^2 \setminus 0) \to \mathbf{RP}^1$ définissant la droite projective *).

L'application α associe à tout point du plan la droite qui le joint à l'origine 0. Le graphique de l'application α (fig. 66) est une surface S de l'espace $(\mathbf{R}^2 \setminus 0) \times \mathbf{RP}^1$. En plongeant $\mathbf{R}^2 \setminus 0$ dans $\mathbf{R}^2$, on peut traiter ce graphique comme une surface différentiable dans le produit cartésien $M = \mathbf{R}^2 \times \mathbf{RP}^1$ (qui est difféomorphe à l'intérieur d'un tore).

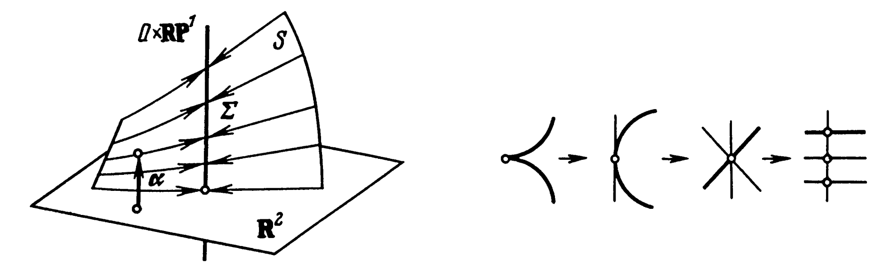


Fig. 66. Eclatement

Fig. 67. Résolution des singularités

EXERCICE 4. Montrer que l'adhérence du graphique ci-dessus dans M est une surface différentiable.

Nota. Les équations $y = vx$, $x = uy$ définissent des surfaces différentiables.

Cette surface Σ (l'adhérence du graphique) est composée du graphique en question et d'une ligne $0 \times \mathbf{RP}^1$ (difféomorphe au cercle). La projection de M sur le premier facteur $\mathbf{R}^2$ définit une application différentiable de Σ sur le plan. Cette application s'appelle *collapsus*. Elle envoie le cercle $0 \times \mathbf{RP}^1$ tout entier en 0 et transforme difféomorphement le reste de Σ (i.e. le graphique) en un plan privé d'un point.

EXERCICE 5. Montrer que la surface Σ est difféomorphe au ruban de Möbius.

Tous les objets géométriques présentant une singularité en 0 peuvent être relevés du plan $\mathbf{R}^2 \setminus 0$ sur la surface Σ par le difféomorphisme ci-dessus. Il s'avère en outre que les singularités deviennent plus simples par ce relèvement (sur Σ).

En répétant la procédure d'éclatement, on peut *résoudre* les singularités. On peut, par exemple, transformer toute courbe algébrique affectée d'une singularité en 0 en une courbe ne présentant de singularités autres que les points de self-intersection.

EXERCICE 6. Résoudre la singularité de la parabole semi-cubique $x^2 = y^3$.

Réponse. Cf. fig. 67.

---

*) La droite projective est l'ensemble de toutes les droites du plan passant par 0. Plus généralement, l'espace projectif $\mathbf{RP}^{m-1}$ est l'ensemble des droites $\mathbf{R}^m$ passant par 0.

Un éclatement centré en un point singulier est utile à l'étude des champs de vecteurs et des champs de directions. Nous avons vu plus haut que dans le cas d'un champ de directions, le premier éclatement nous conduit déja à une équation à variables séparables.

EXERCICE 7. Montrer qu'un champ de vecteurs différentiable sur le plan, nul en l'origine des coordonnées se relève sur la surface Σ en un champ qui se prolonge différentiablement à un cercle collé par un sigma-processus.

4. Equations quasi homogènes. Rapportons le plan à un système de coordonnées linéaires (x, y) et fixons deux nombres réels α et β.

DÉFINITION. On appelle *groupe d'homothéties quasi homogènes du plan* le groupe à un paramètre de transformations linéaires

$$g^s(x, y) = (e^{\alpha s}x, e^{\beta s}y).$$

Les nombres α et β s'appellent *poids* des variables x et y et se notent : $\alpha = \deg x$, $\beta = \deg y$.

Si $\alpha = \beta = 1$, $\{g^s\}$ est le groupe ordinaire des homothéties.

DÉFINITION. On dit qu'une équation est *quasi homogène* (*de poids* α et β) si le champ de directions qui la définit sur le plan est invariant par le groupe des homothéties quasi homogènes.

EXERCICE 1. Choisir les poids de telle sorte que le champ de directions de l'équation $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = -x/y^3$ soit quasi homogène.

Réponse. $\alpha = 2, \beta = 1$.

THÉORÈME 1. *L'équation quasi homogène* $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = F(x, y)$ *de poids* $\deg x = \alpha$, $\deg y = \beta$ *se ramène à une équation à variables séparables par un passage aux coordonnées* $(x, y^\alpha/x^\beta)$ *dans le domaine* $x > 0$.

Démonstration. Les orbites du groupe des homothéties quasi homogènes sont des « demi-paraboles » $y^\alpha = Cx^\beta$ (fig. 30, page 38). Prenons pour ligne Γ (pt. 2) la droite $x = 1$ paramétrée par y. Les homothéties quasi homogènes transforment les droites parallèles à Γ en elles-mêmes. Donc, le théorème découle du lemme du pt. 2 et de la remarque afférente.

Voyons maintenant comment reconnaître si une équation est quasi homogène ou non à l'inspection de son second membre.

DÉFINITION. On dit qu'une fonction f est *quasi homogène de degré* r si elle satisfait à l'identité

$$f(e^{\alpha s}x, e^{\beta s}y) \equiv e^{rs}f(x, y).$$

En d'autres termes, f est le vecteur propre commun des opérateurs $(g^s)^*$ (où g^s est une homothétie quasi homogène), associé aux valeurs propres e^{rs}.

EXEMPLE. Un polynôme est quasi homogène de degré r (avec les poids α

et β) si et seulement si les exposants des monômes $x^p y^q$ qui en font partie sont situés sur le diagramme de Newton $\alpha p + \beta q = r$ (fig. 68).

L'exposant quasi homogène d'un polynôme quasi homogène s'appelle aussi *poids*. Par exemple, le poids de x est α, celui de y est β, celui de x^2y^3 est $2\alpha + 3\beta$, etc. La pondération s'appelle aussi *graduation*.

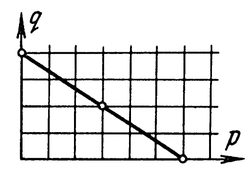


Fig. 68. Diagramme de Newton d'une fonction quasi homogène

EXERCICE 2. Choisir le poids des variables de telle sorte que le polynôme $x^2y + y^4$ soit quasi homogène de degré 1.

Réponse. $\deg y = 1/4$, $\deg x = 3/8$.

EXERCICE 3. Montrer qu'une fonction f des variables x_i de poids α_i est quasi homogène de degré r si et seulement si elle satisfait à la relation d'Euler $\sum \alpha_i x_i \partial f/\partial x_i = rf$.

REMARQUE. Le champ de vecteurs $\sum \alpha_i x_i \partial/\partial x_i$ s'appelle *champ d'Euler quasi homogène* (c'est le champ de vitesses de phase du groupe des homothéties quasi homogènes). La relation d'Euler exprime que f est le vecteur propre de l'opérateur de dérivation suivant le champ d'Euler, associé à la valeur propre r.

THÉORÈME 2. *Pour que le champ de directions de l'équation* $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = F(x, y)$ *soit quasi homogène, il est nécessaire et suffisant que le second membre soit quasi homogène et que son poids soit égal à la différence des poids de y et de x :*

$$\deg F = \deg y - \deg x = \beta - \alpha.$$

Démonstration. Les homothéties quasi homogènes g^s multiplient la quantité y, donc $\mathrm{d}y$, par $e^{\beta s}$, et la quantité x, donc $\mathrm{d}x$, par $e^{\alpha s}$. Pour que le champ de directions soit transformé en lui-même par une telle homothétie, il faut que la valeur de F en un point image soit égale au produit de la valeur de F au point contre-image par un nombre égal à celui par lequel a été multiplié le rapport $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ (ou y/x), i.e. par $e^{(\beta-\alpha)s}$. C.Q.F.D.

REMARQUE. Donc, dans le calcul des poids, il faut manipuler $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ comme une fraction en traitant d comme un "facteur" de poids 0. Le poids de $\mathrm{d}x$ est alors α, celui de $\mathrm{d}y$ est β et celui de $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ est $\beta - \alpha$.

La condition de quasi homogénéité d'une équation est traduite par l'égalité des poids du premier et du second membre.

EXERCICE 4. Choisir le poids des variables de telle sorte que l'équation différentielle des courbes de phase de l'équation de Newton $\ddot{x} = Cx^k$ soit quasi homogène.

Solution. L'équation des courbes de phase est $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = Cx^k/y$. Donc, $2\beta = (k+1)\alpha$.

5. Considérations de similitude et de dimension. Les *équations quasi homogènes* sur des espaces des phases de dimension quelconque se définissent comme en dimension deux. Les *champs de vecteurs quasi homogènes* sont définis par la condition $\deg \partial/\partial x_i = -\deg x_i$. Par exemple le champ d'Euler est de degré 0.

EXERCICE 1. Montrer que si f est une fonction quasi homogène de degré r et v un champ de vecteurs quasi homogène de degré s, la dérivée de f suivant v est une fonction quasi homogène de degré $r + s$.

EXERCICE 2. Soit $\dot{x} = P$, $\dot{y} = Q$, où P et Q sont des polynômes homogènes de degré m. Montrer que si une orbite est fermée et parcourue en un temps T, elle se transforme par une homothétie de rapport e^s en une orbite fermée qui est parcourue en un temps $e^{s(1-m)}T$.

EXERCICE 3. Soit $\dot{x} = v(x)$, où v est un champ quasi homogène de degré r. Montrer que si T est le temps mis pour parcourir une orbite fermée γ et g^s est une homothétie quasi homogène, alors $g^s\gamma$ est aussi une orbite fermée parcourue en un temps $e^{-sr}T$.

EXERCICE 4. Comment la période d'oscillations du «pendule mou» $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x^3$ dépend-elle de l'amplitude $x_{\max}$?

Réponse. Elle est inversement proportionnelle à l'amplitude.

Si l'on fait intervenir des considérations de symétrie, on voit apparaître non seulement des dérivées premières mais aussi des dérivées secondes. Voyons comment elles se comportent par des homothéties quasi homogènes. On a de toute évidence le

THÉORÈME. *L'image de la courbe représentative d'une fonction $y = \varphi(x)$ par l'homothétie quasi homogène $(x, y) \mapsto (e^{\alpha s}x, e^{\beta s}y)$ est la courbe représentative d'une fonction $y = \Phi(x)$ telle que*

$$\frac{d^k\Phi}{dx^k}\ (\textit{au point image}) = e^{(\beta-k\alpha)s}\frac{d^k\varphi}{dx^k}\ (\textit{au point antécédent}).$$

En d'autres termes, $d^k y/(dx)^k$ se transforme comme y/x^k (ce qui explique la commodité de la notation de Leibniz). Donc, *pour reconnaître si une équation contenant des dérivées supérieures est quasi homogène ou non, il suffit d'assigner à la lettre* d *le poids* 0 *et d'exiger l'égalité des poids du premier et du second membre.*

EXERCICE 5. Montrer que si dans un champ défini par une force homogène de degré m une particule parcourt une trajectoire γ en un temps T, elle parcourra la trajectoire homothétique $\lambda\gamma$ en un temps $T' = \lambda^{(1-m)/2}T$.

Solution. L'équation de Newton $d^2x/dt^2 = F(x)$, où F est homogène de degré m, se transforme en elle-même par des homothéties quasi homogènes convenables : il faut prendre les poids α (pour x) et β (pour t) tels que $\alpha - 2\beta = m\alpha$. Choisissons $\alpha = 2$ et $\beta = 1 - m$. Avec l'homothétie $x' = \lambda x$, on a $T' = \lambda^{(1-m)/2}T$.

EXERCICE 6. Montrer que dans le champ gravitationnel les carrés du temps de parcours de telles trajectoires sont entre eux comme les cubes des dimensions linéaires *).

*) C'est un cas particulier de la troisième loi de Kepler, dans lequel la similitude des trajectoires n'est pas conjecturée. La loi de la gravitation universelle a été déduite des deux précédents exercices, la loi de Kepler date d'avant.

Solution. En faisant $m = -2$ (la loi de la gravitation universelle) dans l'exercice précédent, on obtient $T' = \lambda^{3/2}T$.

Exercice 7. Etablir une dependance de période d'oscillations en fonction de l'amplitude dans le cas d'une force de rappel proportionnelle à l'écart (« oscillateur linéaire ») et le cube de l'écart (force «molle»).

Réponse. Dans le cas d'un pendule linéaire la période est indépendante de l'amplitude, dans le cas d'un pendule mou, elle lui est inversement proportionnelle.

Exercice 8. L'équation de la chaleur est de la forme $\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (t est le temps, x la distance, u la température). On sait que les fluctuations annuelles de la température terrestre sont la cause du gel du sol d'une région jusqu'à un mètre de profondeur. Jusqu'à quelle profondeur le sol gèlerait-il si la température variait quotidiennement avec la même amplitude ?

Solution. L'équation se transforme en elle-même par les homothéties quasi homogènes $(t, x) \mapsto (e^{2s}t, e^s x)$. Donc, une diminution de la période de 365 fois entraîne une diminution de $\sqrt{365}$ fois de la profondeur de gel.

Réponse. A une profondeur de 5 cm.

Galilée s'est servi de la similitude pour expliquer pourquoi les animaux terrestres sont de taille limitée : le poids croît proportionnellement au cube de la dimension linéaire, la solidité des os, au carré. Les animaux aquatiques échappent à cette loi, ce qui explique que les baleines atteignent de bien plus grandes dimensions que les éléphants par exemple. Les applications de la similitude aux divers domaines scientifiques s'appellent : *théorie de la similitude, analyse des dimensions, skaling*, etc.

6. Méthode d'intégration des équations différentielles. Il existe encore quelques méthodes permettant d'intégrer explicitement une équation différentielle. Soit par exemple l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}.$$

Mettons-la sous la forme

$$Q\,dy - P\,dx = 0$$

(une 1-forme est nulle sur les vecteurs tangents aux courbes intégrales). Si cette forme est la différentielle totale d'une fonction F :

$$Q\,dy - P\,dx = dF,$$

alors cette fonction est constante le long de chaque courbe intégrale.

Sachant les lignes de niveau de F, on peut trouver les courbes intégrales. Il suffit même que la forme $Q\,dy - P\,dx$ devienne une différentielle totale après sa multiplication par une fonction convenable (en effet, la multiplication simultanée de P et Q par une même fonction ne change pas l'équation initiale). Une telle fonction s'appelle *facteur intégrant*. Ce facteur existe toujours (dans un voisinage d'un point où $Q \neq 0$) mais le trouver est aussi difficile que de résoudre l'équation initiale.

La principale méthode de résolution et d'étude des équations différentielles consiste à choisir les difféomorphismes (les changements de variables) qui ramènent à une forme élémentaire le champ de directions, le champ de vecteurs ou le flot étudiés. Ces changements de variables sont mentionnés plus haut pour les équations homogènes et quasi homogènes.

Il existe de nombreuses méthodes de recherche des changements de variables pour l'intégration d'équations différentielles de forme spéciale. Les listes de ces équations et leurs méthodes de résolution figurent dans les recueils de problèmes (cf. par exemple « Recueil de problèmes d'équations différentielles » de A. Philippov, §§ 4, 5, 6, 8, 9, 10) et dans les aide-mémoire (par exemple, le livre de E. Kamke « *Differentialgleichungen* » qui contient près de 1600 équations). Chacun est en mesure d'allonger ces listes en prenant une équation quelconque déjà résolue et en y faisant un changement de variable quelconque. Les maîtres de l'intégration des équations différentielles (par exemple Jacobi) ont utilisé avec succès cette méthode pour la résolution de certains problèmes d'application. Ces dix dernières années, nous sommes les témoins d'un regain d'intérêt inattendu pour certaines équations intégrables exactement qui sont liées à des problèmes délicats de géométrie algébrique d'une part et de physique des solutions en forme de particules des équations aux dérivées partielles (solitons, instantons, etc.) d'autre part.

Mais ces méthodes d'intégration présentent deux défauts de principe. Premièrement, une équation aussi simple que $dx/dt = x^2 - t$ ne s'intègre pas par quadrature, c'est-à-dire que la solution ne s'exprime pas par une combinaison finie de fonctions algébriques et élémentaires et d'intégrales de ces fonctions *). Deuxièmement, la formule volumineuse qui donne la solution sous forme explicite est souvent moins utile qu'une simple formule approchée. Par exemple, l'équation $x^3 - 3x = 2a$ peut être résolu explicitement par la formule de Cardan : $x = \sqrt[3]{a + \sqrt{a^2 - 1}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{a^2 - 1}}$. Mais si l'on désire résoudre cette équation pour $a = 0{,}01$, on remarquera que pour a petit sa racine $x \approx -(2/3)a$, fait qui n'est pas du tout évident du point de vue de la formule de Cardan. Dans le même ordre d'idées, l'équation du pendule $\ddot{x} + \sin x = 0$ se résout explicitement par des intégrales (elliptiques). Mais il est plus simple de résoudre la plupart des problèmes relatifs au comportement du pendule à partir de l'équation appro-

*) La démonstration de ce théorème de Liouville est voisine de celle de l'impossibilité de résoudre par radicaux une équation du 5[e] degré (Ruffini-Abel-Galois) : elle découle de l'impossibilité de résoudre un groupe. Contrairement à la théorie ordinaire de Galois, il est question ici non pas d'un groupe fini, mais d'un groupe de Lie non résoluble. Ces équations sont étudiées en algèbre différentielle.

chée des petites oscillations ($\ddot{x} + x = 0$) et de considérations qualitatives n'utilisant pas la formule explicite (cf. § 12).

Les équations se résolvant exactement sont utiles à titre d'exemples, puisqu'elles permettent parfois de mettre en évidence des phénomènes se produisant dans des cas plus compliqués. Par exemple, l'étude de la solution exacte de l'équation $\dot{x} = kx$ permet de prouver le théorème d'unicité pour l'équation à second membre différentiable la plus générale (cf. § 2, pt. 3). Les autres exemples sont fournis par les solutions autosimulées des équations de physique mathématique.

EXERCICE. Trouver les solutions de l'équation de Laplace *) dans $\mathbf{R}^2$ et dans $\mathbf{R}^3$, qui dépendent seulement de la distance du point courant à l'origine des coordonnées.

Réponse. $C \ln 1/r$ + const, C/r + const (les potentiels newtoniens ; de façon plus rigoureuse, $\Delta(\ln 1/r) = -2\pi\delta$ dans $\mathbf{R}^2$, $\Delta(1/r) = -4\pi\delta$ dans $\mathbf{R}^3$ (pourquoi ?)).

A chaque fois qu'on a trouvé un problème qui se résout exactement, on a la possibilité de résoudre approximativement les problèmes proches par les méthodes de la théorie des perturbations.

Signalons qu'il est toutefois dangereux d'étendre les résultats obtenus en résolvant exactement un problème, aux problèmes proches de forme générale : souvent, une équation exactement intégrable l'est précisément parce que ses solutions se comportent plus simplement que celles des problèmes proches non intégrables. Par exemple, l'équation des orbites du modèle de Lotka-Volterra est intégrable (pt. 7, § 2) grâce justement au fait que toutes ces orbites sont fermées (alors que les orbites de la plupart des modèles proches non intégrables sont des spirales non fermées).

---

*) On appelle *opérateur de Laplace* dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$ l'opérateur $\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad} = \sum \partial^2/\partial x_i^2$ (x_i sont des coordonnées cartésiennes). L'équation de Laplace est de la forme $\Delta u = 0$. Les solutions de cette équation s'appellent *fonctions harmoniques*. Par exemple, la distribution stationnaire de la température est donnée par une fonction harmonique. L'opérateur de Laplace mesure l'écart entre la valeur moyenne d'une fonction dans une petite boule et la valeur de cette fonction au centre de la boule. La moyenne d'une fonction harmonique sur une boule quelconque est égale à la valeur de cette fonction au centre de la boule (prouvez-le !).

CHAPITRE 2

THÉORÈMES FONDAMENTAUX

Dans ce chapitre on formule les théorèmes d'existence et d'unicité des solutions et des intégrales premières, de dépendance des solutions par rapport aux conditions initiales et aux paramètres. Les démonstrations sont produites au chap. 4. Ici on discute seulement le lien existant entre ces résultats.

§ 7. Théorèmes de redressement

On formule ici le théorème fondamental de redressement d'un champ de directions et on en déduit les théorèmes d'existence, d'unicité et de dépendance différentiable de la solution par rapport aux conditions initiales et aux paramètres, les théorèmes de prolongement et des flots locaux.

1. Redressement d'un champ de directions. Considérons un champ de directions différentiable dans un domaine U d'un espace à n dimensions.

DÉFINITION. On appelle *redressement* d'un champ de directions un difféomorphisme transformant ce champ en un champ de directions parallèles (fig. 69). Un champ est dit *redressable* s'il admet un redressement.

THÉORÈME 1 (fondamental). *Tout champ de directions différentiable est redressable au voisinage de chaque point. Si un champ est r fois continûment différentiable* (*i.e. de classe* C^r, $1 \leqslant r \leqslant \infty$), *le difféomorphisme redressant peut être choisi de classe* C^r.

EXEMPLE. Le champ de directions de l'équation $\dot{x} = x$ (fig. 69) est redressable par le difféomorphisme $(t, x) \mapsto (t, y = xe^{-t})$. En effet, ce difféomorphisme envoie les courbes intégrales $x = Ce^t$ du plan (t, x) dans des droites parallèles $y = C$ du plan (t, y).

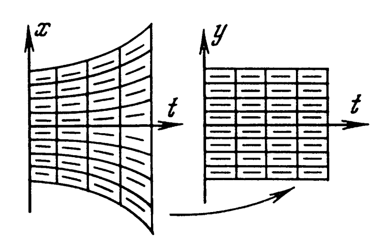


Fig. 69. Redressement d'un champ de directions

EXERCICE 1. Redresser les champs de directions des équations $\dot{x} = t$ et $\dot{x} = x^2$ au voisinage de l'origine des coordonnées.

EXERCICE 2. Tout champ de directions différentiable sur le plan est-il redressable globalement ?

Réponse. Non, cf. fig. 60.

EXERCICE* 3. Soit donné dans $\mathbf{R}^3$ un champ (différentiable) de plans (un plan est appliqué en chaque point de $\mathbf{R}^3$). Peut-on redresser ce champ (c'est-à-dire le transformer en un champ de plans parallèles par un difféomorphisme convenable) ?

Nota. Le champ redressable est un champ de plans tangents à une famille de surfaces.

Réponse. Non. Considérons par exemple le champ de plans défini par l'équation $y\,dx + dz = 0$ (un vecteur appartient à un plan du champ si cette 1-forme s'annule sur lui). Il n'existe *aucune* surface tangente aux plans de ce champ.

La démonstration du théorème fondamental 1 sera produite au § 32. Ce théorème admet encore deux autres formulations.

THÉORÈME 2. *Tous les champs de directions différentiables définis dans des domaines de même dimension sont localement difféomorphes (se correspondent par un difféomorphisme).*

$1 \Rightarrow 2$: d'après le théorème fondamental tous les champs sont localement difféomorphes à un champ standard. $2 \Rightarrow 1$: la difféomorphie locale à tout champ entraîne en particulier la difféomorphie locale au champ standard, i.e. la redressabilité locale.

THÉORÈME 3. *L'équation différentielle* $\dot{x} = \mathbf{v}(t, x)$ *à second membre différentiable est localement équivalente à l'équation élémentaire* $dy/d\tau = 0$.

En d'autres termes : *Au voisinage de chaque point de l'espace des phases élargi* (t, x) *il existe un système de coordonnées admissibles* (τ, y) *(auquel on passe par un difféomorphisme) dans lequel cette équation s'écrit sous la forme élémentaire* : $dy/d\tau = 0$.

$1 \Rightarrow 3$: redressons d'abord le champ de directions $\mathbf{v}$ et considérons ensuite des coordonnées cartésiennes dans lesquelles l'axe des temps τ est parallèle au champ de directions redressé. $3 \Rightarrow 1$: tout champ de directions est localement le champ de directions d'une équation différentielle convenable. Le passage au système local de coordonnées dans lequel cette équation devient $dy/d\tau = 0$ redresse le champ donné.

EXERCICE* 4. Peut-on redresser dans l'espace des phases élargi $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ tout entier le champ de directions d'une équation $\dot{x} = v(t, x)$ dont le second membre est différentiable et défini sur cet espace tout entier ?

EXERCICE 5. Montrer que le système de coordonnées du théorème 3 peut être choisi de telle sorte que le temps reste invariant ($\tau \equiv t$).

EXERCICE 6. Redresser le champ de directions de l'équation $\dot{x} = x + t$ sur le plan tout entier par un difféomorphisme de la forme $(t, x) \mapsto (t, y(t, x))$ laissant le temps invariant.

EXERCICE 7. Peut-on redresser le champ de directions de l'équation $\dot{x} = x^2$ sur le plan tout entier par un difféomorphisme laissant le temps invariant ?

Réponse. Non.

Le théorème fondamental de redressement a en fait été inventé par Newton. Dans sa célèbre « deuxième lettre » (datée du 24 octobre 1676) à

Oldenburg, secrétaire de la Société royale, Newton chiffra la méthode de démonstration sous forme de la deuxième (longue) anagramme (Newton préférait faire passer sa correspondance avec Leibniz qui vivait en Allemagne par Oldenburg). Dans le langage actuel la méthode de Newton consiste en ce qui suit.

Soit donnée une équation $\dot{x} = v(t, x)$. Cherchons le difféomorphisme redressant $y = h(t, x)$ pour lequel $y = x$ lorsque $t = 0$ (le temps reste invariant). De la condition $\dot{y} = 0$ on déduit pour h l'équation $\partial h/\partial t + (\partial h/\partial x)v \equiv 0$. Développons v et h en séries entières de t :

$$h = h_0 + th_1 + \dots, \qquad v = v_0 + tv_1 + \dots$$

On a alors $h_0(x) \equiv x$, donc $\partial h/\partial x = E + th_{1*} + \dots$ Portons les développements de h et v dans l'équation pour h. Développons le premier membre en série entière de t. Annulons les coefficients de t^0, t^1, ... de cette série (en vertu de l'unicité des coefficients de la série de Taylor). Nous obtenons

$$h_1 + v_0 = 0, \quad 2h_2 + h_{1*}v_0 + v_1 = 0, \dots$$

L'équation pour h_k contient, outre h_k, les seules dérivées de h_m d'ordre $<k$. Nous pouvons donc trouver de proche en proche h_1, h_2 et ainsi de suite.

Ceci constitue la *méthode de Newton d'intégration des équations différentielles à l'aide des séries.* Pour appliquer cette méthode, il faut savoir développer les fonctions données en séries. A cet effet, Newton a dû inventer sa formule du binôme $(1 + t)^a = 1 + at + \dots$

EXERCICE 8. Trouver par la méthode de Newton la solution de l'équation $\dot{x} = x$, qui satisfait à la condition initiale $\varphi(0) = 1$.

Solution. $\varphi = 1 + t\varphi_1 + t^2\varphi_2 + \dots \Rightarrow \varphi_1 + 2\varphi_2 t + 3\varphi_3 t^2 + \dots = 1 + \varphi_1 t + \varphi_2 t^2 + \dots$, donc, $\varphi_1 = 1$, $\varphi_2 = \varphi_1/2$, $\varphi_3 = \varphi_2/3$, ... , d'où $\varphi_k = 1/k!$. C'est ainsi que fut établi le premier développement en série de l'exponentielle.

L'évolution de l'analyse suit aujourd'hui encore la voie tracée par Newton.

La démonstration de la convergence des séries construites par Newton a beaucoup occupé les esprits des mathématiciens du XIX[e] siècle. La convergence des séries de h a été prouvée par Cauchy dans le cas analytique *). Le théorème de Cauchy a été généralisé au cas d'une différentiabilité finie par Picard ; la démonstration est développée au § 32.

---

*) C'est Euler qui a attiré l'attention sur la nécessité de prouver la convergence en remarquant que les séries ainsi obtenues dans d'autres problèmes divergeaient parfois. Euler a cherché la solution sous forme d'une série de t de l'équation $dx/dt = (x - t)/t^2$, qui s'annule en $t = 0$. Il a trouvé la série partout divergente $x = \sum (k - 1)!\, t^k$.

Le théorème fondamental 1 est une assertion de même nature que le théorème d'algèbre linéaire relatif à la réduction des formes quadratiques ou des matrices d'opérateurs linéaires à la forme normale. Il donne une description exhaustive du comportement local d'un champ de directions en ramenant toutes les questions au cas trivial d'un champ de directions parallèles.

Le théorème homologue en analyse est le théorème des fonctions implicites. On dit qu'une application différentiable $f : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ est *non dégénérée en* 0 si le rang de sa dérivée est maximal en 0 (i.e. égal au plus petit des nombres m et n). Soit $f(0) = 0$.

Deux applications f et g de ce type sont dites *localement équivalentes en* 0 si l'une est l'image de l'autre par des difféomorphismes des espaces source et but laissant 0 invariant : $h : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$, $k : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, $f \circ h = k \circ g$.

En d'autres termes, *deux applications sont localement équivalentes si elles sont exprimées par les mêmes formules dans des systèmes de coordonnées locales* (*d'origine* 0) *convenablement choisis dans les espaces source et but.*

THÉORÈME DES FONCTIONS IMPLICITES. *Deux applications différentiables* (*d'espaces de dimensions m et n fixées*) *sont équivalentes au voisinage des points non dégénérés.*

En particulier, *toute application est équivalente à sa partie linéaire en un point non dégénéré.* Donc, le théorème formulé est l'un des innombrables théorèmes de linéarisation.

Pour forme normale locale à laquelle se ramène l'application f par les difféomorphismes h et k, il est naturel de prendre la forme élémentaire suivante :

$$y_i = x_i \quad \text{pour} \quad i \leqslant r, \quad y_i = 0 \quad \text{pour} \quad i > r,$$

où $r = \min(m, n)$ est le rang de la dérivée de f en 0, x_i et y_i, les coordonnées respectives des espaces source et but. En d'autres termes, f est une immersion si la dimension de l'espace source est strictement inférieure à celle de l'espace but, et un fibré dans le cas contraire.

Le lecteur habitué à des formulations plus compliquées du théorème des fonctions implicites peut s'assurer sans peine de leur équivalence à la formulation géométrique élémentaire ci-dessus.

Tous les théorèmes des formes normales décrivent les orbites de divers groupes («changements de variables») sur des ensembles (de matrices, de formes, de champs, d'applications respectivement).

2. Théorèmes d'existence et d'unicité. Le théorème fondamental de redressement entraîne le

COROLLAIRE 1. *Par chaque point d'un domaine sur lequel est défini un champ de directions différentiable il passe une courbe intégrale.*

Démonstration. Considérons un difféomorphisme redressant le champ donné. Le champ redressé est composé de directions parallèles. Par chaque point du champ redressé il passe une courbe intégrale (en l'occurrence une droite). Le réciproque du difféomorphisme redressant associe à cette droite la courbe intégrale cherchée.

COROLLAIRE 2. *Deux courbes intégrales d'un champ de directions différentiable ayant un point commun sont confondues au voisinage de ce point.*

Démonstration. Ceci est évident pour le champ redressé. Quant au difféomorphisme redressant il associe aux courbes intégrales du champ initial les courbes intégrales du champ redressé.

COROLLAIRE 3. *L'équation différentielle* $\dot{x} = \mathbf{v}(t, x)$, *avec une condition initiale* (t_0, x_0) *appartenant au domaine de différentiabilité du second membre, admet une solution et une seule (en ce sens que deux solutions quelconques vérifiant cette condition initiale sont confondues dans un voisinage du point* t_0).

Démonstration. En appliquant les corollaires 1 et 2 au champ de directions de notre équation dans l'espace des phases élargi, on obtient le corollaire 3.

REMARQUE. Dans le corollaire 3 et dans la suite le point x est un point d'un espace des phases de dimension (finie) quelconque m. Ce corollaire s'appelle *théorème d'existence et d'unicité des solutions d'un système de m équations du premier ordre*.

3. Théorèmes de dépendance continue et différentiable des solutions par rapport à la condition initiale. Traitons la valeur de la solution φ de l'équation différentielle $\dot{x} = \mathbf{v}(t, x)$, qui vérifie la condition initiale $\varphi(t_0) = x_0$ à l'instant t comme une fonction Φ de $(t_0, x_0 ; t)$ à valeurs dans l'espace des phases élargi.

Le théorème fondamental de rectification entraîne le

COROLLAIRE 4. *Toute solution d'une équation à second membre différentiable dépend différentiablement des conditions initiales.*

Ceci exprime que *la fonction* Φ *ci-dessus est définie, continue et différentiable au voisinage de chaque point* $(t_0, x_0 ; t_0)$ (*de classe* C^r *si* $\mathbf{v}$ *l'est*).

Démonstration. Pour l'équation élémentaire ($\mathbf{v} \equiv 0$) ceci est évident ($\Phi \equiv x_0$). L'équation générale se ramène à cette dernière par un difféomorphisme (les détails sont laissés au lecteur).

REMARQUE. Le théorème de différentiabilité par rapport à la condition initiale offre une méthode très efficace d'étude de l'influence d'une petite perturbation de la condition initiale sur la solution. Si l'on connaît la solution qui satisfait une certaine condition initiale, pour déterminer l'écart entre la solution vérifiant une condition initiale voisine et la solution «non perturbée», on obtient en première approximation une équation linéaire homogène (une équation aux variations). La «théorie des perturbations» ainsi engendrée est tout simplement une variante de la méthode des séries de Newton.

EXERCICE 1. Trouver la dérivée de la solution φ de l'équation $\dot{x} = x^2 + x \sin t$, qui vérifie la condition initiale $\varphi(0) = a$ pour $a = 0$.

Solution. D'après le corollaire 4, la solution se développe en série de Taylor $\varphi = \varphi_0 + a\varphi_1 + \dots$ (les points de suspension figurent des termes d'ordre supérieur au premier par rapport à a), où φ_0 est la solution non perturbée (celle qui vérifie la condition initiale nulle), φ_1 la dérivée cherchée. Pour l'équation étudiée $\varphi_0 \equiv 0$. En portant la série de Taylor de φ dans l'équation et en identifiant les coefficients des termes de même puissance (en vertu de l'unicité

de la série de Taylor), on obtient pour φ_1 l'équation aux variations $\dot{\varphi}_1 = \varphi_1 \sin t$, avec la condition initiale $\varphi_1(0) = 1$ (pourquoi ?).

Réponse. $e^{1-\cos t}$.

EXERCICE 2. Trouver la portion d'orbite du système généralisé de Lotka-Volterra $\dot{x} = x(1 - ya(x,y)), \dot{y} = y(x - 1)$, voisine de l'axe x et passant par le point $x = 1, y = \varepsilon$ (à ε^2 près).

Solution. L'équation des orbites est : $dy/dx = y(x - 1)/(x(1 - ya))$. La solution non perturbée est $y \equiv 0$. L'équation aux variations s'écrit : $dy/dx = y(x - 1)/x$.

Réponse. $y = \varepsilon e^{x-1}/x$ *indépendamment de la forme de la fonction a.*

EXERCICE 3. Trouver la dérivée de la solution de l'équation du pendule $\ddot{\theta} = -\sin \theta$, vérifiant la condition initiale $\theta(0) = a$, $\dot{\theta}(0) = 0$ par rapport à a pour $a = 0$.

Solution. Pour appliquer le corollaire 4 à l'équation il faut la représenter par un système. Le système d'équations aux variations obtenu peut être représenté par une seule équation du second ordre. Il est commode d'écrire non pas les systèmes et leurs solutions mais les équations du second ordre qui leur sont équivalentes et leurs solutions. La solution non perturbée est $\theta = 0$. L'équation aux variations est l'équation des petites oscillations du pendule : $\ddot{\theta} = -\theta$.

Réponse. $\cos t$.

AVERTISSEMENT. En utilisant les formules approchées pour la solution perturbée, obtenues à l'aide de l'équation aux variations, il importe de ne pas perdre de vue qu'elles fournissent une bonne approximation pour t fixe et pour un petit écart ε de la condition initiale par rapport à la solution non perturbée : l'erreur pour t fixe est $O(\varepsilon^2)$ mais cette majoration n'est pas uniforme en $t \to \infty$ (la constante implicite dans $O(\varepsilon^2)$ croît avec t).

Par exemple, la formule établie dans l'exercice 2 donnerait une fausse idée de la forme des orbites du modèle ordinaire de Lotka-Volterra si on l'appliquait à la description de la forme de ces orbites dans l'ensemble (on sait du § 2 que ces orbites sont fermées ; la portion d'orbite qui est éloignée de l'axe x n'est nullement décrite par la réponse de l'exercice 2).

De façon analogue, la solution de l'équation complète du pendule vérifiant la condition initiale $(a, 0)$ est voisine de la solution de l'équation des petites oscillations (vérifiant la même condition initiale) à t fixe : leur différence est d'ordre $O(a^3)$ (pourquoi ?). Mais pour tout $a \neq 0$ fixe, l'erreur croît avec t, et pour t assez grand la solution approchée n'est plus liée à la solution perturbée (à cause de l'inégalité des périodes des petites et des vraies oscillations). La permutation des passages à la limite $t \to \infty$ et $a \to 0$ est illicite !

EXERCICE 4. Trouver le premier terme (linéaire par rapport à a) du développement en série de Taylor de la solution de l'équation du pendule mou $\ddot{x} = -x^3$, qui vérifie la condition initiale $x(0) = 0, \dot{x}(0) = a$.

Solution. Solution non perturbée : $x \equiv 0$. Equation aux variations : $\ddot{\varphi}_1 = 0$. Condition initiale : $\varphi_1(0) = 0$, $\dot{\varphi}_1(0) = 1$ (pourquoi ?).

Réponse. $x \approx at$.

Du théorème de différentiabilité il résulte que l'erreur de cette formule approchée n'est pas supérieure à $O(a^2)$ pour chaque t fixe. Mais pour tout $a \neq 0$ fixe, l'approximation est car-

rément mauvaise pour t assez grand. Ceci ressort par exemple du fait que la solution approchée croît indéfiniment et la vraie solution décrit les oscillations périodiques de l'amplitude qui est petite avec a (l'amplitude est de l'ordre de $\sqrt{a}$ pour des considérations de similitude).

Pour estimer le domaine d'applicabilité de la formule approchée, on peut calculer les approximations suivantes : $x = at + a^2\varphi_2 + a^3\varphi_3 + \ldots$ En portant ceci dans l'équation, on obtient $a^2\ddot{\varphi}_2 + a^3\ddot{\varphi}_3 + \ldots = -a^3t^3 + \ldots$ Donc, $\varphi_2 \equiv 0$, $\ddot{\varphi}_3 = -t^3$, $\dot{\varphi}_3 = -t^4/4$, $\varphi_3 = -t^5/20$, $x \approx at - a^3t^5/20 + \ldots$ le second terme est petit par rapport au premier si $a^2t^4/20 \ll 1$ i.e. $t \ll a^{-1/2}$. En d'autres termes, la valeur de la solution approchée doit être petite en regard de l'amplitude de la vraie oscillation : $at \ll \sqrt{a}$.

EXERCICE 5. Montrer que sous la condition indiquée l'erreur relative de la solution approchée est réellement petite.

Solution. Ceci résulte de considérations de similitude. Les homothéties quasi homogènes $X = e^s x$, $T = e^{-s}t$ transforment l'équation $\ddot{x} = -x^3$ en elle-même. La solution qui vérifie la condition initiale $(0, a)$ est envoyée dans la solution qui vérifie la condition initiale $(0, A = e^{2s}a)$. La solution approchée $x \approx at$ se transforme en la solution $X \approx AT$. Choisissons s de telle sorte que $A = 1$. Pour $A = 1$ la solution $X \approx T$ admet une petite erreur relative tant que $T \ll 1$. Mais les homothéties ne modifient pas les erreurs relatives. Donc, l'erreur relative de l'approximation $x \approx at$ est aussi petite pour $T \ll 1$. Or, $T = e^{-s}t$, $a = e^{-2s}$. Donc, $T \ll 1$ pour $t \ll a^{-1/2}$. Par conséquent, pour a petit, l'approximation donne lieu à une petite erreur relative même pour de très grands t, pourvu que t soit petit en regard de $1/\sqrt{a}$.

Dans les applications de la théorie des équations différentielles on a toujours affaire à un grand nombre de quantités dont certaines sont «très petites» et d'autres «très grandes». Il n'est pas toujours facile de dire si une quantité est grande par rapport à une autre (i.e. dans quel ordre doivent s'effectuer les passages à la limite) ; la réponse à cette question représente souvent la moitié du problème.

4. Transformation sur un intervalle de temps (t_0, t). Considérons une équation différentielle $\dot{x} = v(t, x)$ à second membre définissant un champ de directions différentiable dans un domaine d'un espace des phases élargi (de dimension quelconque finie $1 + m$).

DÉFINITION. On appelle *transformation sur un intervalle de temps* (t_0, t) une application d'un domaine de l'espace des phases dans cet espace, associant à la condition initiale à l'instant t_0 la valeur prise à l'instant t par la solution véritiant cette condition initiale (fig. 70).

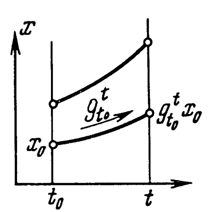


Fig. 70. Transformation sur l'intervalle de temps (t_0, t)

Cette transformation se note $g^t_{t_0}$. Dans les notations du corollaire 4

$$g^t_{t_0}x_0 = \Phi(t_0, x_0 ; t).$$

Le théorème fondamental de redressement entraîne le

COROLLAIRE 5. *Les transformations sur l'intervalle* (t_0, t) *pour une équation à second membre différentiable*

1) *sont définies au voisinage de chaque point* x_0 *pour* t *suffisamment proche de* t_0 ;

2) *sont des difféomorphismes locaux (de classe* C^r *si le second membre l'est) et dépendent différentiablement de* t *et de* t_0 ;

3) *pour* s *et* t *assez proches de* t_0, *on a l'identité* $g_{t_0}^t x = g_s^t g_{t_0}^s x$ *(pour tout* x *pris dans un voisinage assez petit du point* x_0) ;

4) *pour* ξ *fixe, la fonction* $\varphi(t) = g_{t_0}^t \xi$ *est la solution de l'équation* $\dot{x} = \boldsymbol{v}(t, x)$, *qui vérifie la condition initiale* $\varphi(t_0) = \xi$.

Le corollaire 5 découle manifestement des corollaires précédents. On peut se servir aussi d'un redressement laissant le temps invariant. Pour l'équation redressée ($\dot{y} = 0$) toutes les transformations sur l'intervalle (t_0, t) sont identiques, donc les propriétés 1) à 4) sont réalisées.

Considérons en particulier le cas de l'équation autonome $\dot{x} = \boldsymbol{v}(x)$. On a alors de toute évidence le

THÉORÈME. *Pour l'équation autonome la transformation* $g_{t_0}^t$ *dépend uniquement de l'intervalle de temps* $t - t_0$ *et pas de l'instant initial* t_0.

Démonstration. Une translation de l'espace des phases élargi de l'équation autonome le long de l'axe t transforme en lui-même le champ de directions, donc envoie courbes intégrales dans courbes intégrales. L'image de la solution φ qui vérifie la condition initiale $\varphi(t_0) = x_0$ par une s-translation est la solution ψ qui vérifie la condition initiale $\psi(t_0 + s) = x_0$. Pour tout t on a $\psi(t + s) = \varphi(t)$. Donc, $g_{t_0}^t \equiv g_{t_0+s}^{t+s}$. C.Q.F.D.

Désignons la transformation $g_{t_0}^{t_0+\tau}$ plus brièvement par g^τ. Les transformations g^τ

1) sont définies pour $|\tau|$ assez petit au voisinage d'un point fixé de l'espace des phases ;

2) sont des difféomorphismes de ce voisinage dans l'espace des phases et dépendent différentiablement de τ ;

3) pour tous $|s|$ et $|t|$ assez petits et pour tout x appartenant à un voisinage du point fixé, est réalisée la propriété de groupe $g^s g^t x = g^{s+t} x$;

4) pour ξ fixe, la fonction $\varphi(t) = g^t \xi$ est la solution de l'équation $\dot{x} = \boldsymbol{v}(x)$, qui vérifie la condition initiale $\varphi(0) = \xi$.

La famille $\{g^t\}$ s'appelle *flot local* du champ de vecteurs $\boldsymbol{v}$.

EXERCICE. Supposons que les coefficients de l'équation $\dot{x} = v(t, x)$ sont T-périodiques ($v(t + T, x) \equiv v(t, x)$) et que toutes les transformations $g_{t_0}^t$ sont partout définies pour elle. Montrer que les transformations sur des intervalles de temps multiples de T forment un groupe : $g_0^{kT} = A^k$ pour tout k entier. Laquelle des deux relations suivantes est vraie : $g_0^{kT+s} = A^k g_0^s$ ou $g_0^{kT+s} = g_0^s A^k$?

Réponse. La deuxième.

5. Théorèmes de dépendance continue et différentiable par rapport au paramètre. Supposons que le second membre de l'équation $\dot{x} = \boldsymbol{v}(t, x ; \alpha)$ dépend différentiablement du paramètre α qui parcourt un domaine A de l'espace $\mathbf{R}^a$.

Le théorème fondamental de redressement entraîne le

COROLLAIRE 6. *La valeur prise à l'instant t par la solution qui vérifie la condition initiale* $\varphi(t_0) = x_0$ *dépend différentiablement de la condition initiale, du temps et du paramètre* α.

Désignons cette valeur par $\Phi(t_0, x_0 ; \alpha, t)$. Le corollaire affirme que *la fonction* Φ *(à valeurs dans l'espace des phases) est définie, continue et différentiable au voisinage de chaque point* $(t_0, x_0 ; \alpha_0, t_0)$ *du produit de l'espace des phases élargi par l'axe du temps et par le domaine de variation du paramètre* (Φ *est de classe* C^r *si le second membre l'est*).

Démonstration. Nous aurons besoin d'un petit artifice. Considérons l'«équation élargie» $\dot{x} = \boldsymbol{v}(t, x ; \alpha)$, $\dot{\alpha} = 0$ à espace des phases de dimension $m + a$ (où $m = \dim \{x\}$). La solution de cette équation, qui vérifie la condition initiale (t_0, x_0, α), est le couple $(x = \varphi(t), \alpha = \alpha_0)$, dont la première composante φ est la solution de l'équation initiale pour $\alpha = \alpha_0$, qui vérifie la condition initiale $\varphi(t_0) = x_0$. D'après le corollaire 4 ce couple dépend différentiablement de $(t_0, x_0 ; t ; \alpha_0)$. Donc, la première composante dépend différentiablement aussi de ces arguments. C.Q.F.D.

REMARQUE. L'artifice ci-dessus ramène le théorème de dépendance différentiable par rapport au paramètre à la dépendance différentiable par rapport aux conditions initiales. Réciproquement, de la dépendance différentiable par rapport au paramètre (pour une condition initiale fixée) on déduit sans peine la dépendance différentiable par rapport à la condition initiale. Il suffit d'effectuer une translation sur l'équation pour transformer la condition initiale en paramètre : $\boldsymbol{v}_\alpha(t, x) = \boldsymbol{v}(t, x - \alpha)$.

Le théorème de dépendance différentiable par rapport au paramètre fournit une méthode très efficace de résolution approchée des équations voisines des équations «non perturbées» dont on connaît une solution. Il suffit de représenter la solution de l'équation perturbée sous la forme d'une série de Taylor suivant les puissances de la perturbation, de porter cette série dans l'équation perturbée et d'identifier les termes de mêmes puissances. Le terme constant de la série sera la solution connue de l'équation non perturbée. Pour la détermination des autres termes on obtient des équations intégrables par récurrence. La plus importante d'entre elles est l'équation des termes du premier degré en la perturbation : c'est une équation aux variations non homogène (cf. § 3).

Cette méthode est constamment utilisée dans toutes les applications de la théorie des équations différentielles sous le nom de *théorie des perturba-*

tions ou *méthode du petit paramètre*. C'est l'une des variantes de la méthode des séries de Newton.

EXERCICE 1. Trouver la dérivée, par rapport au paramètre a pour $a = 1$, de la solution de l'équation logistique $\dot{x} = x(a - x)$, qui vérifie la condition initiale $x(0) = 1$.

Solution. Supposons que $a = 1 + \varepsilon$. La solution perturbée est $x = \varphi_0 + \varepsilon\varphi_1 + O(\varepsilon^2)$. En portant dans l'équation perturbée, on obtient

$$\dot{\varphi}_0 + \varepsilon\dot{\varphi}_1 + \ldots = (\varphi_0 + \varepsilon\varphi_1 + \ldots)(1 + \varepsilon - \varphi_0 - \varepsilon\varphi_1 - \ldots).$$

L'équation non perturbée $\dot{x} = x(1 - x)$ a pour solution $\varphi_0 \equiv 1$. En identifiant les coefficients de ε, on trouve l'équation aux variations $\dot{\varphi}_1 = 1 - \varphi_1$ avec la condition initiale $\varphi_1(0) = 0$ (pourquoi ?).

Réponse. $1 - e^{-t}$.

REMARQUE. Le physicien aurait conduit les calculs ci-dessus de la manière suivante. Il est clair que pour $a = 1 + \varepsilon$ la solution $x = 1 + y$ diffère peu de 1. En négligeant cette différence entre le facteur x du second membre et 1, il aurait obtenu l'équation approchée $\dot{x} \approx a - x$, $\dot{y} \approx \varepsilon - y$, d'où $y \approx \varepsilon(1 - e^{-t})$.

La « rigueur » mathématique traditionnelle interdit de négliger la différence entre le premier x et 1 et non pas entre le second et 1. En fait, le raisonnement du physicien est correct, il représente tout simplement le sténogramme des raisonnements ci-dessus.

EXERCICE 2. Trouver la dérivée, par rapport au moment a pour $a = 0$, de la solution de l'équation du pendule à moment de rotation constant : $\ddot{\theta} = a - \sin\theta$. Le pendule est au repos à l'instant initial ($\theta = \dot{\theta} = 0$).

Solution. $\theta = ay + \ldots$, $a\ddot{y} = a - ay$, $\ddot{y} = 1 - y$, $y - 1 = z$, $\ddot{z} = -z$, $z(0) = -1$, $\dot{z}(0) = 0$, $z = -\cos t$, $y = 1 - \cos t$.

Réponse. En première approximation, l'effet d'un petit moment de rotation se traduit par un déplacement de la position d'équilibre en a, le pendule réalisant de petites oscillations avec une fréquence 1 autour du point a. Donc, la dérivée de la solution par rapport à a est $1 - \cos t$.

AVERTISSEMENT. En toute rigueur, toutes nos solutions approchées sont légitimées par le théorème de différentiabilité seulement pour $|t|$ petit. En réalité, on peut les justifier sans peine pour tout intervalle de temps fini $|t| \leqslant T$, pourvu que la perturbation ε ne soit pas supérieure à une quantité dépendant de T. Sur cet intervalle, l'erreur de la première approximation de la théorie des perturbations est majorée par $O(\varepsilon^2)$, mais la constante figurant dans O croît avec T.

Il est extrêmement risqué de généraliser les conclusions établies de la sorte à un intervalle de temps infini : les passages à la limite $t \to \infty$ et $\varepsilon \to 0$ ne sont pas permutables.

EXEMPLE. Considérons un seau rempli d'eau au fond duquel on a pratiqué un petit trou de diamètre ε (fig. 71). Pour tout T il existe un ε si petit

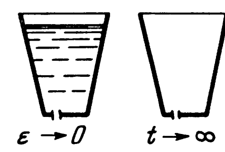


Fig. 71. Comportement asymptotique des solutions de l'équation perturbée

que le seau reste quasiment plein durant un long intervalle de temps $t < T$. Mais pour tout $\varepsilon > 0$ fixe le seau se vide lorsque $t \to \infty$.

EXERCICE 3. Trouver la dérivée, par rapport au paramètre ω pour $\omega = 1$, de la solution de l'équation des petites oscillations du pendule $\ddot{\theta} = -\omega^2\theta$, qui vérifie la condition initiale $\theta(0) = 1, \dot{\theta}(0) = 0$.

Solution. La solution exacte est $\theta = \cos \omega t$. La dérivée est donc $-t \sin t$.

Si l'on connaissait la solution exacte uniquement pour $\omega = 1$ et si l'on cherchait la solution pour $\omega = 1 + \varepsilon$ par la méthode du petit paramètre, on trouverait $\theta \approx \cos t - \varepsilon t \sin t$. On pourrait penser que la vraie solution n'est pas bornée si l'on oubliait qu'il est possible de se servir de l'approximation seulement pour εt petit.

6. Théorèmes de prolongement. Soit une équation différentielle $\dot{x} = \boldsymbol{v}(t, x)$ définie par un champ de directions différentiable sur un domaine U de l'espace des phases élargi. Soit Γ un sous-ensemble de U.

DÉFINITION. On dit que la solution φ qui vérifie la condition initiale $\varphi(t_0) = x_0$ est *prolongeable en avant* (resp. *en arrière*) *à* Γ s'il existe une solution vérifiant la même condition initiale, dont le graphique rencontre Γ en un point en lequel $t \geqslant t_0$ (resp. $t \leqslant t_0$).

Une solution est *indéfiniment prolongeable en avant* (resp. *en arrière*) s'il existe une solution vérifiant la même condition initiale et définie pour tout $t \geqslant t_0$ (resp. $t \leqslant t_0$).

EXEMPLE 1. Aucune solution de l'équation $\dot{x} = x^2 + 1$ n'est indéfiniment prolongeable ni en avant ni en arrière.

DÉFINITION. On dit qu'un ensemble est *compact* si de tout recouvrement par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini.

Les compacts d'un espace euclidien sont tous ses ensembles bornés et fermés.

On appelle *frontière* d'un ensemble l'ensemble des points dont tout voisinage contient aussi bien des points qui appartiennent que des points qui n'appartiennent pas à cet ensemble.

Le théorème fondamental de redressement entraîne le

COROLLAIRE 7. *Toute solution vérifiant une condition initiale appartenant à un compact de l'espace des phases élargi est prolongeable en avant et en arrière à la frontière de ce compact.*

En d'autres termes, *par tout point intérieur à un compact il passe une courbe intégrale qui coupe la frontière de ce compact en avant et en arrière du point initial* (fig. 72).

Fig. 72. Prolongement d'une solution à la frontière d'un compact

Le prolongement est unique en ce sens que deux solutions vérifiant la même condition initiale sont confondues partout où elles sont définies.

EXERCICE 1. Est-il vrai qu'une courbe intégrale de tout champ de directions différentiable sur un domaine d'un espace euclidien, passant par un point d'un compact K est prolongeable à la frontière de ce compact ?

Réponse. Non. Exemple : le champ de directions des courbes de phase du pendule dans le domaine $x_1^2 + x_2^2 > 0$, K : la couronne $1 \leqslant x_1^2 + x_2^2 \leqslant 2$.

Donc, pour que le théorème soit vrai, il est essentiel que le champ de directions ne soit pas « vertical » dans l'espace des phases élargi.

Démonstration du corollaire 7. Prouvons d'abord l'unicité. Considérons la borne supérieure des valeurs du temps pour lesquelles deux solutions vérifiant la même condition initiale sont confondues. Ces deux solutions sont confondues à gauche de ce point. Si elles sont toutes deux définies en ce point, elles y sont confondues, car continues. Mais elles seront alors confondues à droite (d'après le théorème local d'unicité). Donc, ce point est l'extrémité d'un intervalle de définition. Ceci prouve l'unicité du prolongement en avant (les raisonnements sont les mêmes pour le prolongement en arrière). Construisons maintenant ce prologement.

D'après le théorème local d'existence, chaque point de l'espace des phases élargi possède un voisinage tel que toute solution vérifiant une condition initiale placée en tout point de ce voisinage est prolongeable en avant et en arrière à un intervalle de temps commun à tous les points de ce voisinage. Du recouvrement du compact par de tels voisinages extrayons un sous-recouvrement fini. Considérons le plus court intervalle de temps correspondant à ces voisinages et désignons-le par ε.

Prolongeons la solution qui vérifie la condition initiale placée au point initial en avant de ε (puisque ce point appartient au compact et par suite est recouvert par l'un de nos voisinages). Considérons la valeur de cette solution au bout d'un temps $\varepsilon/2$ après l'instant initial. Si le point correspondant de la courbe intégrale appartient encore au compact, on prolonge la solution qui vérifie une condition initiale contenue dans ce compact en avant encore de ε (soit de $3\varepsilon/2$ à partir de l'instant initial). Déplaçons encore le temps de $\varepsilon/2$ (i.e. considérons la valeur de la solution prolongée au bout d'un temps ε après le début) et prolongeons la solution de ε, et ainsi de suite. Au terme d'un nombre fini de pas la courbe intégrale quitte le compact (puisque sa projection sur l'axe t ne peut être illimitée et t croît à chaque pas de $\varepsilon/2$). Donc, à un certain moment la courbe traversera la frontière du compact. C.Q.F.D.

EXERCICE 2. Montrer que toute solution de l'équation $\dot{x} = v(t, x)$ définie par un champ de directions sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ se prolonge indéfiniment si v croît à l'infini moins vite que la première puissance de x, i.e. $|v(t, x)| \leqslant k|x|$ pour tout t et $|x| \geqslant r$, où r et k sont des constantes.

Nota. Construire, par comparaison avec un mouvement dans le champ $\dot{x} = kx$, des compacts dont les frontières seront accessibles au bout d'un intervalle de temps aussi long que l'on veut.

Supposons maintenant que le domaine de définition du second membre de l'équation $\dot{x} = \boldsymbol{v}(t, x)$ contient le cylindre $\mathbf{R} \times K$, où K est un compact de l'espace *des phases*.

DÉFINITION. La solution φ qui vérifie la condition initiale $\varphi(t_0) = x_0$ est *prolongeable en avant* (resp. *en arrière*) *à la frontière* ∂K *de* K s'il existe une solution vérifiant la même condition initiale et prenant des valeurs de ∂K pour un certain $t \geqslant t_0$ (resp. $t \leqslant t_0$).

Le corollaire 7 entraîne de toute évidence le

COROLLAIRE 8. *Toute solution vérifiant une condition initiale appartenant au compact K dans l'espace des phases est prolongeable en avant (resp. en arrière) soit indéfiniment, soit à* ∂K.

EXEMPLE 2. La solution de l'équation du pendule $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -x_1$, qui vérifie la condition initiale $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ n'est pas prolongeable à la frontière du compact $x_1^2 + x_2^2 \leqslant 2$.

Démonstration du corollaire 8. Considérons un intervalle de temps $\Delta = [a, b]$ contenant t_0. Le cylindre $\Delta \times K$ de l'espace des phases élargi est compact (fig. 73). D'après le théorème précédent, la solution se prolonge à sa frontière qui est composée de deux « troncs » ($a \times K$ et $b \times K$) et d'une « surface latérale » $\Delta \times (\partial K)$ (d'après la formule de Leibniz, $\partial(\Delta \times K) = (\partial\Delta) \times K + \Delta \times (\partial K)$). Si la courbe intégrale coupe le tronc $b \times K$ pour tout $b > t_0$, la solution est indéfiniment prolongeable en avant ; si elle coupe la surface latérale pour un quelconque b, elle est prolongeable à ∂K.

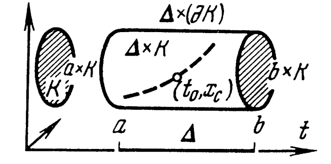


Fig. 73. Prolongement d'une solution à la frontière d'un compact dans l'espace des phases

COROLLAIRE 9. *Toute solution de l'équation autonome* $\dot{x} = \boldsymbol{v}(x)$, *qui vérifie une condition initiale appartenant à un compact de l'espace des phases se prolonge en avant* (resp. *en arrière*) *soit indéfiniment, soit à la frontière de ce compact.*

Car le cylindre $\mathbf{R} \times K$ est contenu dans l'espace des phases élargi de l'équation autonome, quel que soit K de l'espace des phases.

EXERCICE 3. Montrer qu'un champ de vecteurs v définit un flot si toutes les solutions de l'équation $\dot{x} = v(x)$ sont indéfiniment prolongeables.

7. Redressement d'un champ de vecteurs. Soit v un champ de vecteurs différentiable sur un domaine U.

On appelle *redressement* d'un champ un difféomorphisme transformant ce champ en un champ de vecteurs parallèles de même longueur sur un espace euclidien (fig. 74).

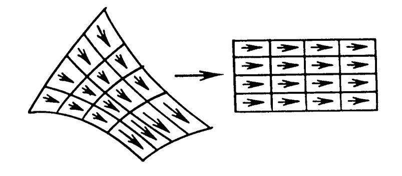


Fig. 74. Redressement d'un champ de vecteurs

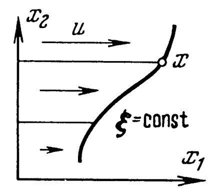


Fig. 75. Construction des coordonnées redressantes

Du théorème fondamental de redressement on déduit sans peine le

COROLLAIRE 10. *Tout champ de vecteurs différentiable est localement redressable au voisinage de chaque point non singulier (i.e. un point en lequel le vecteur du champ n'est pas nul).*

Démonstration. Au voisinage d'un point non singulier les vecteurs du champ ne sont pas nuls, donc ils définissent un champ de directions sur ce domaine de l'espace des phases. Ce champ est redressable d'après le théorème fondamental. Le redressement rendra parallèles les vecteurs du champ, mais leurs longueurs dépendront en général d'un point. En coordonnées redressantes l'équation définie par notre champ devient

$$\dot{x}_1 = u(x), \quad \dot{x}_2 = \ldots = \dot{x}_n = 0, \quad \text{de plus } u(0) \neq 0.$$

Substituons à x_1 la coordonnée ξ en définissant $\xi(x)$ comme le temps mis par le point représentatif pour aller du plan $x_1 = 0$ au point x (fig. 75). La formule de Newton nous donne le temps cherché : $\xi(x) = \int_0^{x_1} \frac{d\eta}{u(\eta\,; x_2, \ldots, x_n)}$. Dans les coordonnées $(\xi, x_2, \ldots, x_n)$ l'équation devient : $\dot{\xi} = 1, \dot{x}_2 = \ldots = \dot{x}_n = 0$, i.e. le champ est redressé.

REMARQUE. Le théorème de redressement d'un champ de vecteurs est une autre forme du théorème de redressement d'un champ de directions (pour déduire le second du premier, il suffit de choisir sur chaque droite du champ de directions un vecteur dépendant différentiablement d'un point, ce qui localement est toujours facile à réaliser).

Voici encore deux énoncés évidents du corollaire 10 :

COROLLAIRE 11. *Deux champs de vecteurs différentiables définis sur des domaines de même dimension se transforment l'un en l'autre par des difféomorphismes dans des voisinages assez petits de tout point non singulier.*

COROLLAIRE 12. *Toute équation différentielle $\dot{x} = \mathbf{v}(x)$ peut être écrite sous la forme normale $\dot{x}_1 = 1, \dot{x}_2 = \ldots = \dot{x}_n = 0$ par un choix convenable des coordonnées dans un voisinage assez petit de tout point non singulier du champ.*

En d'autres termes, *toute équation $\dot{x} = \mathbf{v}(x)$ est localement équivalente à l'équation élémentaire $\dot{x} = \mathbf{v}$ ($\mathbf{v} \neq 0$ est indépendant de x) au voisinage de tout point non singulier.*

EXERCICE 1. Redresser le champ de vitesses de phase du pendule $x_2\partial/\partial x_1 - x_1\partial/\partial x_2$ au voisinage du point $x_1 = 1, x_2 = 0$.

Solution. Les coordonnées polaires conviennent ici. Soient $x_1 = r\cos\theta$, $x_2 = -r\sin\theta$ ($r > 0$, $|\theta| < \pi$). Dans ces coordonnées l'équation devient $\dot{r} = 0, \dot{\theta} = 1$, donc le champ est rectifié : il est de la forme $\partial/\partial\theta$.

EXERCICE 2. Redresser les champs :

1) $x_1\partial/\partial x_1 + 2x_2\partial/\partial x_2$ pour $x_1 > 0$;

2) $\partial/\partial x_1 + \sin x_1\partial/\partial x_2$;

3) $x_1\partial/\partial x_1 + (1 - x_1^2)\partial/\partial x_2$ pour $x_1^2 < 1$.

§ 8. Applications aux équations d'ordre supérieur au premier

Les théorèmes fondamentaux relatifs aux systèmes d'un nombre quelconque d'équations d'ordre quelconque se déduisent des théorèmes homologues pour les systèmes d'équations du premier ordre.

1. Equivalence d'une équation d'ordre *n* et d'un système de *n* équations du premier ordre.

DÉFINITION. On appelle *équation différentielle d'ordre n* une équation

$$\frac{d^n x}{dt^n} = F\left(t\,; x, \frac{dx}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right), \tag{1}$$

où F est une fonction différentiable (de classe C^r, $r \geqslant 1$) définie dans un domaine U d'un espace de dimension $1 + n$ (le temps t et les dérivées de la fonction inconnue d'ordre 0 à $n - 1$ compris).

On appelle *solution* de l'équation (1) une C^n-application $\varphi : I \to \mathbf{R}$ d'un intervalle I de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, telle que

1) le point de coordonnées $(\tau, \varphi(\tau), \ldots, \varphi^{(n-1)}(\tau))$ appartienne au domaine U pour tout τ de I ;

2) pour tout τ de I

$$\left.\frac{d^n\varphi}{dt^n}\right|_{t=\tau} = F(\tau\,; \varphi(\tau), \ldots, \varphi^{(n-1)}(\tau)).$$

EXEMPLE. L'équation des petites oscillations du pendule $\ddot{x} = -x$ admet pour solutions les fonctions $\varphi(t) = \sin t$ et $\varphi(t) = \cos t$ (fig. 76). Donc, *les courbes représentatives des solutions de l'équation du second ordre peuvent se couper* (contrairement aux courbes des solutions de l'équation du premier ordre, i.e. aux courbes intégrales qui, en vertu du théorème d'unicité, soit ne se coupent pas, soit sont confondues sur tout un intervalle.

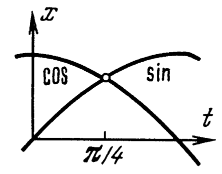


Fig. 76. Courbes représentatives de deux solutions d'une équation du second ordre

L'espace des phases de l'équation du pendule est le plan rapporté aux coordonnées $(x, \dot{x})$: la donnée de ces deux nombres à l'instant initial définit le mouvement tout entier du pendule. Considérons le problème de la dimension de l'espace des phases de l'équation générale (1) d'ordre n : combien faut-il se donner de nombres à l'instant initial pour définir de façon unique une solution à toutes les dates ?

THÉORÈME. *L'équation* (1) *d'ordre n est équivalente au système d'équations du premier ordre*

$$\dot{x}_1 = x_2, \dots, \dot{x}_{n-1} = x_n, \quad \dot{x}_n = F(t\,; x_1, \dots, x_{n-1}) \tag{2}$$

en ce sens que si φ *est solution de l'équation* (1), *le vecteur* $(\varphi, \dot{\varphi}, \dots$ $\dots, \varphi^{(n-1)})$ *est solution du système* (2) *et si* $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ *est solution du système* (2), φ_1 *est solution de l'équation* (1).

La démonstration est évidente.

Ainsi, l'espace des phases du processus décrit par une équation différentielle d'ordre n est de dimension n : le cours du processus (φ) est décrit par la donnée, à l'instant initial t_0, d'un ensemble de n nombres qui sont les valeurs des dérivées de φ d'ordre $< n$ au point t_0.

REMARQUE. La raison pour laquelle il faut se donner n conditions initiales à l'instant initial pour définir de façon unique la solution d'une équation différentielle d'ordre n deviendra sans doute claire si cette équation est traitée comme la limite d'équations aux différences.

Fixons un nombre $h > 0$ (appelé *pas*). On appelle *différence première* d'une fonction donnée φ de pas h une fonction prenant la valeur $\varphi(t + h) - \varphi(t)$ en t. La différence première se note $\Delta\varphi$. La différence seconde $\Delta^2\varphi$ se définit comme $\Delta(\Delta\varphi)$.

EXERCICE 1. Montrer que $(\Delta^2\varphi)(t) = \varphi(t + 2h) - 2\varphi(t + h) + \varphi(t)$.

On définit de même la différence n-ième $\Delta^n\varphi = \Delta(\Delta^{n-1}\varphi)$.

EXERCICE 2. Montrer que $\Delta^n\varphi \equiv 0$ si et seulement si $\varphi(t + kh)$ est un polynôme de degré $<n$ en $k \in \mathbf{Z}$.

Par exemple, si dans une ligne on écrit successivement les valeurs de k^2, dans la deuxième ligne en dessous, les différences de ces valeurs, on obtient dans la troisième ligne uniquement des 2 ; si l'on refait cette procédure pour k^3, on obtiendra partout des 6 dans la quatrième ligne, et ainsi de suite :

1		4		9		16		25
	3		5		7		9	
		2		2		2		
1		8		27		64		125
	7		19		37		61	
		12		18		24		
			6		6			

Une *équation aux différences du premier ordre* est une équation de la forme $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = v(t, \varphi)$, i.e. $\frac{\varphi(t + h) - \varphi(t)}{h} = v(t, \varphi(t))$. Cette équation nous permet, si l'on connaît $\varphi(t_0)$, de trouver $\varphi(t_0 + h)$, puis $\varphi(t_0 + 2h)$ et ainsi de suite. Lorsque $h \to 0$, l'équation aux différences se transforme en équation différentielle. Rien donc d'étonnant à ce que la solution d'une équation différentielle du premier ordre soit définie par la valeur d'un seul nombre à l'instant initial.

L'*équation aux différences du second ordre* est

$$\frac{\Delta^2\varphi}{(\Delta t)^2} = F\left(t\,;\varphi, \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right),$$

i.e.

$$\frac{\varphi(t + 2h) - 2\varphi(t + h) + \varphi(t)}{h^2} = F\left(t\,;\varphi(t), \frac{\varphi(t + h) - \varphi(t)}{h}\right).$$

Si l'on connaît les valeurs de φ à deux dates séparées par un intervalle de temps h, on peut trouver, à partir de cette équation, la valeur de φ au bout de h. Ainsi, toutes les valeurs $\varphi(t_0 + kh)$ se déterminent à partir des deux premières.

Lorsque $h \to 0$, l'équation aux différences du second ordre se transforme en équation différentielle. Rien donc d'étonnant à ce que la solution d'une équation différentielle du second ordre soit définie par la donnée de deux nombres à l'instant initial (resp. de n nombres pour une équation d'ordre n). Le théorème précédent justifie précisément le passage à la limite lorsque $h \to 0$.

EXERCICE 3. Montrer que les polynômes de degré $<n$ et eux seuls sont solutions de l'équation $d^n x/dt^n = 0$.

EXERCICE 4. Trouver la dimension de la variété des solutions de l'équation de Helmholtz $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 0$ dans le domaine $x^2 + y^2 > 0$, qui dépendent uniquement de la distance à l'origine du système de coordonnées.

Solution. La fonction inconnue de r doit vérifier une équation du second ordre, donc les solutions sont définies par deux nombres.

2. Théorèmes d'existence et d'unicité. Le théorème du pt. 1 et les théorèmes d'existence et d'unicité pour un système d'équations du premier ordre (§ 7) entraînent le

COROLLAIRE. *Soit $u = (u_0 ; u_1, \ldots, u_n)$ un point du domaine de définition U du second membre de l'équation* (1). *L'équation* (1) *admet une solution φ et une seule vérifiant la condition initiale*

$$\varphi(u_0) = u_1, \quad \dot{\varphi}(u_0) = u_2, \ldots, \quad \varphi^{(n-1)}(u_0) = u_n \tag{3}$$

(*en ce sens que deux solutions quelconques vérifiant la même condition initiale sont confondues sur l'intersection de leurs intervalles de définition*).

Pour noter la condition initiale de l'équation (1), on se sert souvent de x à la place de φ.

EXEMPLE. Les solutions $\cos t$ et $\sin t$ de l'équation du pendule $\ddot{x} = -x$ vérifient, pour $t = \pi/4$, les conditions initiales respectives $x(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, $\dot{x}(\pi/4) = -\sqrt{2}/2$ et $x(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, $\dot{x}(\pi/4) = \sqrt{2}/2$ (fig. 76). Ces conditions initiales sont distinctes, donc les courbes représentatives des solutions se coupent sans se confondre. Le théorème d'unicité de l'équation du second ordre n'interdit qu'une seule chose aux courbes qui se coupent : celle de présenter une tangente commune au point d'intersection. Les courbes représentatives des solutions d'une équation du troisième ordre peuvent être tangentes, mais au point de contact elles doivent nécessairement avoir des courbures différentes, etc.

EXERCICE 1. Supposons que les fonctions t et $\sin t$ sont solutions d'une équation (1). Trouver l'ordre n de cette équation.

Solution. Les dérivées d'ordre 0,1 et 2 des fonctions t et $\sin t$ prennent la même valeur en 0. Si ces fonctions étaient solutions de l'équation générale d'ordre trois, elles seraient confondues d'après le théorème d'unicité. Il est aisé d'imaginer une équation d'ordre $n \geqslant 4$ satisfaite par ces fonctions, par exemple $x^{(n)} + x^{(n-2)} = 0$.

Réponse. $n \geqslant 4$.

EXERCICE 2. Les courbes représentatives de deux solutions de l'équation $\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0$ peuvent-elles être de la forme représentée sur la figure 77 ?

Solution. Non, puisque les solutions $c\varphi_1$ et φ_2 vérifient la même condition initiale et ne sont pas confondues.

EXERCICE 3. Considérons l'équation $2x = t^2\ddot{x}$. Les solutions $x \equiv 0$ et $x = t^2$ vérifient toutes deux la condition initiale $x = \dot{x} = 0$ pour $t = 0$, mais elles ne sont pas confondues. Pourquoi ?

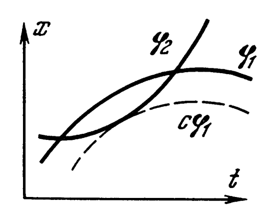


Fig. 77. Disposition impossible des courbes représentatives

Solution. Le théorème d'unicité concerne les équations de la forme (1), i.e. des équations résolues par rapport à la dérivée supérieure. Or l'équation envisagée ne peut être mise sous cette forme (au voisinage de 0).

EXERCICE 4. Résoudre l'équation aux différences $\Delta^3\varphi = 0$, avec la condition initiale $\varphi(0) = 0$, $(\Delta\varphi)(0) = 0$, $(\Delta^2\varphi)(0) = 2$ pour des t multiples du pas $h = 1$.

Solution. $\varphi = a + bt + ct^2$, $\Delta\varphi = b + 2ct + c$, $\Delta^2\varphi = 2c$. Les conditions initiales nous donnent $c = 1$, $b = -1$, $a = 0$.

Réponse. $\varphi = t^2 - t$.

3. Théorèmes de différentiabilité et de prolongement. L'équivalence d'une équation d'ordre n et d'un système d'équations du premier ordre nous permet de conclure que la solution d'une équation d'ordre n dépend différentiablement des conditions initiales et des paramètres (si le second membre dépend différentiablement des paramètres) ; le lecteur formulera sans peine le théorème de prolongement.

EXERCICE 1. Trouver en première approximation sur ε l'influence d'une petite résistance du milieu $\varepsilon F(x, \dot{x})$ au mouvement d'un corps tombant en chute libre d'une hauteur h.

Solution. Il faut résoudre l'équation $\ddot{x} = -g + \varepsilon F(x, \dot{x})$, avec les conditions initiales $x(0) = h$, $\dot{x}(0) = 0$.

D'après le théorème de différentiabilité par rapport au paramètre, la solution est de la forme $\varphi = \varphi_0 + \varepsilon\varphi_1 + \dots$, où $\varphi_0(t) = h - gt^2/2$. En portant $x = \varphi(t)$ dans l'équation et en identifiant les termes en ε, on trouve $\ddot{\varphi}_1 = F(\varphi_0, \dot{\varphi}_0)$, d'où $\varphi_1(t) = \int_0^t \int_0^s F(\varphi_0(\tau), \dot{\varphi}_0(\tau))\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}s$. Si par exemple $F = -\dot{x}$, alors $\varphi_1 = gt^3/6$. Donc, le retard de la chute est proportionnel en première approximation à la hauteur : $-\varepsilon\varphi_1/\dot{\varphi}_0 = \varepsilon t^2/6 = \varepsilon h/3g$.

EXERCICE 2. Montrer que toutes les solutions de l'équation du pendule $\ddot{\theta} = -\sin\theta$ se prolongent indéfiniment.

EXERCICE 3. Pour quels k naturels, les solutions de l'équation $\ddot{x} = x^k$ sont-elles toutes indéfiniment prolongeables ?

Réponse. Uniquement pour $k = 1$.

4. Systèmes d'équations. Par *système d'équations différentielles* on comprendra un système d'équations en n fonctions inconnues

$$\frac{\mathrm{d}^{n_i}x_i}{\mathrm{d}t^{n_i}} = F_i(t\,; x, \dots), \qquad i = 1, \dots, n, \tag{4}$$

où parmi les arguments de chaque fonction F_i figurent la variable indépen-

dante t, les variables dépendantes x_j et leurs dérivées d'ordre $<n_j$ ($j = 1, \dots, n$) respectivement.

La solution du système se détermine comme au pt. 1. A souligner que la solution est une fonction vectorielle définie sur un intervalle. Donc, $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ représente non pas n solutions mais une solution d'un système de n équations, remarque qui est valable pour les systèmes d'équations algébriques et différentielles.

Déterminons tout d'abord la dimension de l'espace des phases du système (4).

THÉORÈME. *Le système* (4) *est équivalent à un système de* $N = \sum_{i=1}^{n} n_i$ *équations du premier ordre.*

En d'autres termes : *l'espace des phases du système* (4) *est à N dimensions.*

Pour prouver ce fait il faut prendre pour coordonnées les dérivées de x_j d'ordre $<n_j$.

Supposons par exemple que $n = n_1 = n_2 = 2$. Le système devient alors

$$\ddot{x}_1 = F_1(t\,; x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2), \qquad \ddot{x}_2 = F_2(t\,; x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2).$$

Le système équivalent de quatre équations est

$$\dot{x}_1 = x_3, \quad \dot{x}_2 = x_4, \quad \dot{x}_3 = F_1(t\,; x), \quad \dot{x}_4 = F_2(t\,; x),$$

où $x = (x_1, x_3, x_2, x_4)$.

EXEMPLE. Le système de n équations différentielles du second ordre de la mécanique de Newton

$$m_i \ddot{q}_i = - \frac{\partial U}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n, \tag{5}$$

où U est l'énergie potentielle, $m_i > 0$ les masses, est équivalent au système de $2n$ équations de Hamilton

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

où $p_i = m_i \dot{q}_i$ et $H = T + U$ est l'énergie totale ($T = \sum m_i \dot{q}_i^2/2 = \sum p_i^2/(2m_i)$ est l'énergie cinétique). L'espace des phases du système (5) est donc à $2n$ dimensions.

Les théorèmes d'existence, d'unicité, de différentiabilité par rapport aux conditions initiales et aux paramètres, ainsi que les théorèmes de prolongement se généralisent automatiquement aux systèmes de forme (4) : pour que la solution soit définie de façon unique, il suffit de se donner les dérivées de x_i d'ordre $<n_i$ à l'instant initial. Par exemple pour le système

d'équations de Newton (5), il suffit de se donner *n* coordonnées et *n* vitesses à l'instant initial.

EXERCICE 1. Un point matériel de masse m en mouvement par rapport à la Terre à une vitesse v est soumis (dans un repère lié à la Terre) à l'action de la force de Coriolis $F = 2m[\mathbf{v}, \mathbf{\Omega}]$, où $\mathbf{\Omega}$ est le vecteur vitesse angulaire de la Terre. De combien la force de Coriolis écarte-t-elle de la verticale un caillou jeté (sans vitesse initiale) dans un puits de 10 m de profondeur à la latitude de Léningrad ($\lambda = 60°$) ?

Solution. Par hypothèse, $\ddot{x} = g + 2[\dot{x}, \Omega]$. La vitesse angulaire $\Omega \approx 7{,}3 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{s}^{-1}$ sera traitée comme un petit paramètre. D'après le théorème de différentiabilité, $x = x_0 + \Omega y + O(\Omega^2), x_0 = gt^2/2$. En portant x dans l'équation, on obtient $\Omega\ddot{y} = 2[gt, \Omega], y(0) = \dot{y}(0) = 0$. Donc, $\Omega y = [g, \Omega]t^3/3$ et par suite $|\Omega y| = \dfrac{2t}{3}|h||\Omega| \cos\lambda$.

Réponse. Le caillou s'écarte de 0,3 mm vers l'Est.

REMARQUE. Le problème de l'écart du caillou a joué un rôle éminent dans l'histoire de la physique. L'écart du caillou vers l'Est (et non pas vers l'Ouest comme on pourrait le penser à première vue) a été prédit par Newton dans une lettre à Hooke datée du 28 novembre 1679 : Newton demandait à Hooke d'effectuer l'expérience du caillou pour prouver la rotation de la Terre qui n'était pas reconnue à l'époque.

Dans sa réponse (en date du 6 janvier 1680) Hooke formula la loi de la gravitation universelle. Newton s'imaginait mal la trajectoire du caillou. Cette controverse contraignit Newton à ne pas rompre avec la science et l'incita à écrire ses fameux *Principes mathématiques de philosophie naturelle* qui inaugurèrent l'ère de la physique moderne.

L'exposant -2 de la loi de la gravitation était correctement indiqué dans la lettre de Hooke (dans ses *Principes*, Newton écrivait que Wren, Hooke et Halley avaient indépendamment l'un de l'autre trouvé que la troisième loi de Kepler correspondait justement à cet exposant). Hooke se fondait, en plus de la loi de Kepler, sur les observations de Halley qui avait remarqué qu'une pendule placée sur le mont Sainte-Hélène accusait du retard. La lettre de Hooke indiquait explicitement que le caillou était mû par cette même force qui obligeait les planètes à se déplacer sur des ellipses képlériennes ; en critiquant la spirale décrite par Newton, Hooke affirmait que si la résistance de l'air était négligée, l'orbite du caillou serait un « elliptoïde excentrique ».

Newton interpréta l'elliptoïde comme une ellipse et s'interressa à la manière dont Hooke avait trouvé l'orbite. Il réussit après de longs travaux à prouver que l'orbite était bien une ellipse (pour la chute aussi bien sur Terre que dans un puits). La démonstration était (et reste) si compliquée sur le plan mathématique qu'il en vint à conclure que Hooke « avait affirmé plus qu'il ne savait ». Il ne devait ensuite plus jamais faire référence à la lettre de Hooke. Dans une lettre à Halley dans laquelle il relatait sa discussion avec Hooke, Newton donna de la différence entre les approches de la science du mathématicien et du physicien une description qui n'a rien perdu de son actualité : « Les mathématiciens qui découvrent et établissent tout, et font tout le travail doivent se contenter du rôle d'ingrats calculateurs et manœuvres ; tel qui ne fait que tout appréhender et aspire à tout accapare toutes les découvertes aussi bien de ses continuateurs que de ses précurseurs ».

Hooke lança des billes d'acier d'une hauteur de 10 m et affirma avoir observé un écart systématique vers le Sud-Est (ce qui est pratiquement impossible en raison de l'extrême petitesse de cet écart par rapport aux effects aérodynamiques). Sans résistance de l'air, le caillou lancé à l'intérieur d'un puits dans une Terre homogène obéirait à la loi de Hooke (la force d'attraction est directement proportionnelle à la distance au centre de la Terre), mais il est peu probable que Hooke l'ait su. L'orbite du caillou est alors une ellipse (dans un système de coordonnées ne tournant pas avec la Terre) dont le centre est celui de la Terre et le demi-petit axe d'une longueur de près de 400 km (pourquoi ?) ; l'orbite est parcourue en un temps égal à

celui mis par un satellite pour parcourir une orbite circumterrestre, i.e. en une heure et demie (pourquoi ?).

EXERCICE 2. La presse a signalé qu'au cours de sa « promenade » dans l'espace le cosmonaute soviétique Léonov avait lancé le couvercle de sa caméra en direction de la Terre. On demande de déterminer la trajectoire de ce couvercle.

Solution. Nous avons affaire à un problème relatif à l'influence d'une *petite* perturbation de la condition initiale sur la solution. D'après la loi de la gravitation universelle l'équation du mouvement peut s'écrire $\ddot{\boldsymbol{r}} = -\gamma \boldsymbol{r}/r^3$. Le mouvement du cosmonaute et du couvercle a lieu dans le plan d'une orbite circulaire, donc on peut admettre que $\boldsymbol{r} \in \mathbf{R}^2$. Ecrivons l'équation du mouvement en coordonnées polaires. Considérons à cet effet le vecteur unitaire $\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{r}/r$ et le vecteur unitaire perpendiculaire $\boldsymbol{e}_\varphi$ qui est dirigé dans le sens du mouvement le long de l'orbite circulaire. Il est clair que $\dot{\boldsymbol{e}}_r = \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi$, $\dot{\boldsymbol{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_r$. Une dérivation de $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r$ nous donne $\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi$, $\ddot{\boldsymbol{r}} = \ddot{r}\boldsymbol{e}_r + 2\dot{r}\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi - r\dot{\varphi}^2\boldsymbol{e}_r$. Donc, l'*équation de Newton en coordonnées polaires* prend la forme d'un système de deux équations du second ordre

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\gamma r^{-2}, \quad r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0.$$

Prenons pour unité de longueur le rayon de l'orbite circulaire du vaisseau spatial (≈ 6400 km). Choisissons l'unité de temps de telle sorte que la vitesse angulaire du mouvement sur l'orbite soit égale à 1. Le mouvement sur l'orbite est alors décrit par les formules $r = 1$, $\varphi = t$ et par suite, $\gamma = 1$. Les conditions initiales pour le vaisseau spatial (et pour le cosmonaute) sont $r(0) = 1$, $\dot{r}(0) = 0$, $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 1$. Les conditions initiales pour le couvercle ne diffèrent que par le fait que $\dot{r}(0) = -v$, où $-v$ est la vitesse du jet du couvercle, i.e. la vitesse initiale du couvercle par rapport au cosmonaute. Supposons que la vitesse du jet du couvercle est par exemple 10 m/s. Alors $v \approx 1/800$ (puisque notre unité de vitesse est voisine de la vitesse de satellisation, i.e. est de l'ordre de 8 km/s).

La quantité 1/800 est petite par rapport à 1, donc nous devons étudier l'influence d'une *petite modification de la condition initiale* sur la solution non perturbée $r = 1$, $\varphi = t$. D'après le theórème de différentiabilité par rapport à la condition initiale, il faut chercher la solution voisine de la solution non perturbée sous la forme $r = 1 + r_1 + \ldots$, $\varphi = t + \varphi_1 + \ldots$, où les points de suspension représentent des quantités d'ordre $O(v^2)$. En portant ces expressions dans l'équation de Newton avec $\gamma = 1$ et en négligeant les quantités d'ordre $O(v^2)$, on obtient les *équations aux variations*

$$\ddot{r}_1 = 3r_1 + 2\dot{\varphi}_1, \quad \ddot{\varphi}_1 + 2\dot{r}_1 = 0.$$

On détermine sans peine la solution des équations aux variations du couvercle, qui vérifie les conditions initiales $r_1(0) = \varphi_1(0) = \dot{\varphi}_1(0) = 0$, $\dot{r}_1(0) = -v$ si l'on remarque que $\dot{\varphi}_1 + 2r_1 \equiv 0$ et par suite $\ddot{r}_1 = -r_1$. Cette solution est de la forme $r_1 = -v \sin t$, $\varphi_1 = 2v(1 - \cos t)$. D'après le theórème de différentiabilité, la vraie solution des équations de Newton diffère de la solution trouvée par de petites quantités d'ordre $O(v^2)$ (pour t pas très grand). Donc, le couvercle décrit par rapport au cosmonaute une ellipse (fig. 78) de demi-axes v et $2v$. Notre unité de longueur est le rayon de l'orbite et $v \approx 1/800$. Par conséquent, les longueurs des demi-axes sont respectivement de l'ordre de 8 et 16 km.

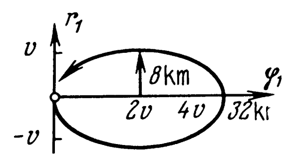


Fig. 78. Mouvement du couvercle par rapport au vaisseau

Le couvercle se déplace d'abord vers le bas (vers la Terre), ensuite il commence à rattraper le cosmonaute et le dépasse de 32 km, finalement il revient par en haut à son point de départ après avoir parcouru une ellipse d'environ 100 km de longueur en un intervalle de temps égal justement à une révolution du vaisseau spatial.

Il va de soi que nous avons négligé dans nos calculs les petites quantités d'ordre $O(v^2)$; le mouvement du couvercle par rapport au cosmonaute ne sera pas en réalité périodique (la boucle ne se boucle pas, l'écart étant de l'ordre de 1/800-ième de la dimension de l'ellipse, i.e. le couvercle passera à environ 10 m du vaisseau). Nous avons négligé aussi de nombreux effets (pression de la lumière, écart du jet du couvercle par rapport à la verticale, différence de l'orbite du vaisseau d'une orbite circulaire, etc.) qui sont la cause d'importantes erreurs.

V. Béletski, auteur d'un livre passionnant « Essais sur le mouvement des corps cosmiques » (M., éd. Mir, 1986) auquel a été emprunté le problème du couvercle, remarque qu'il est peu probable que le couvercle ait pu être visible à plus d'un kilomètre, or le premier kilomètre de l'ellipse est très proche d'une droite, c'est pourquoi Léonov a cru que le couvercle qu'il venait de lancer *se dirigeait droit vers la Terre.*

5. Remarques terminologiques. Les équations et systèmes étudiés plus haut sont parfois appelés *normaux* ou *résolus par rapport aux dérivées d'ordre supérieur.* Cet ouvrage ne traite pas d'autres équations et systèmes, de sorte qu'un système d'équations différentielles désignera soit un système normal, soit un système équivalent à un système normal (par exemple, un système d'équations de Newton (5)).

Les fonctions du second membre du système peuvent être définies de plusieurs manières : explicitement, implicitement, paramétriquement, etc.

EXEMPLE 1. L'écriture

$$\dot{x}^2 = x$$

est une forme condensée de deux équations différentielles distinctes $\dot{x} = \sqrt{x}$ et $\dot{x} = -\sqrt{x}$ ayant chacune pour espace des phases la demi-droite $x \geqslant 0$. Ces équations sont définies par deux champs de vecteurs différents, différentiables pour $x > 0$ (fig. 79).

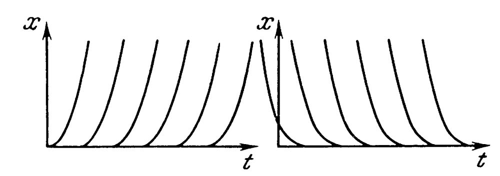


Fig. 79. Courbes intégrales de deux équations regroupées par l'écriture $\dot{x}^2 = x$

Si le second membre est donné sous une forme implicite, il faut définir attentivement son domaine de définition et se garder de toute ambiguïté dans les notations.

EXEMPLE 2. On appelle *équation de Clairaut* une équation de la forme

$$x = \dot{x}t - f(\dot{x}).$$

L'équation de Clairaut

$$x = \dot{x}t - \dot{x}^2/2 \tag{6}$$

est la forme condensée de deux équations différentielles distinctes définies pour $x \leqslant t^2/2$. Chacune d'elles satisfait aux conditions du theórème d'existence et d'unicité dans la région extérieure à la parabole $x < t^2/2$ (fig. 80). Par chaque point de cette région il passe deux tangentes à la parabole. Chaque tangente est composée de deux demi-tangentes. Chaque demi-tangente est une courbe intégrale de l'une des deux équations (6).

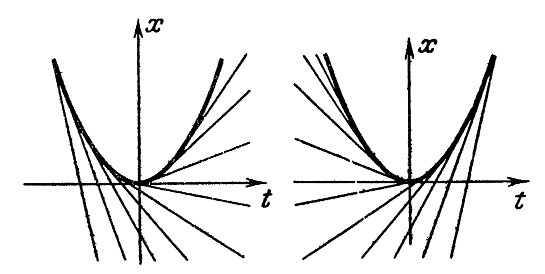


Fig. 80. Courbes intégrales de deux équations écrites sous forme d'une équation de Clairaut

EXERCICE 1. Etudier l'équation de Clairaut $x = \dot{x}t - \dot{x}^3$.

REMARQUE. Quand on étudie des équations dont le second membre est implicitement donné, i.e. des équations de la forme $F(t, x, \dot{x}) = 0$, on a souvent intérêt à envisager le champ de directions défini par cette équation non pas sur le plan (t, x) mais sur une surface E définie par l'équation $F(t, x, p) = 0$ dans l'espace (t, x, p) (fig. 81).

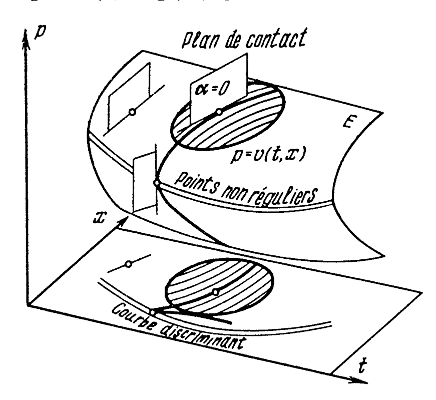


Fig. 81. Surface E et traces des plans de contact sur E

L'espace à trois dimensions (t, x, p) s'appelle *espace des 1-jets* *) *de fonctions*. Les points de cet espace sont toutes les directions non verticales (i.e. non parallèles à l'axe x) passant par tous les points du plan (t, x). Le point (t, x, p) est la direction de la droite $\mathrm{d}x = p\,\mathrm{d}t$ au point (t, x). La 1-forme $\alpha = \mathrm{d}x - p\,\mathrm{d}t$ définit la structure de contact, décrite plus bas, dans la variété des 1-jets. Les vecteurs appliqués en un point de l'espace des 1-jets, qui annulent cette forme engendrent un plan appelé *plan de contact*. Un plan de contact est vertical (il contient une direction de l'axe p). Tous les plans de contact forment un *champ de plans de contact* dans l'espace des jets, appelé *structure de contact*.

Supposons que la surface E qui définit l'équation est différentiable (cette condition est remplie pour l'équation $F = 0$ avec F générique). Considérons la projetée de la surface E sur le plan (t, x) parallèlement à une p-direction. On dit qu'un point de la surface E est ***régulier*** si le plan tangent à E en ce point n'est pas vertical (i.e. ne contient pas une p-direction). Au voisinage d'un point régulier, la projection est un difféomorphisme (d'après le theórème des fonctions implicites), et la surface, le graphique de la fonction différentiable $p = v(t, x)$. Cette fonction définit l'équation différentielle $\dot{x} = v(t, x)$ (au voisinage du projeté du point régulier envisagé). En ce point peuvent se projeter d'autres points, réguliers ou non, de la surface. A chaque point régulier correspond un champ de directions plan et une équation différentielle ; l'équation $F = 0$ regroupe toutes ces équations différentielles.

Considérons le plan de contact associé à un point régulier de la surface E. Ce plan coupe le plan tangent suivant une droite. Donc, au voisinage d'un point régulier de E est engendré un champ de directions différentiable : le champ des traces des plans de contact. On a de toute évidence le

THÉORÈME. *La projection de la surface E d'équation $p = v(t, x)$ sur le plan (t, x) parallèlement à l'axe p transforme le champ des traces des plans de contact sur E en le champ de directions de l'équation* $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = v(t, x)$ *sur le plan.*

COROLLAIRE. *Cette projection associe aux courbes intégrales du champ des traces sur E les courbes intégrales de l'équation sur le plan.*

Le plan tangent à E en un point non régulier est vertical. Mais il peut très bien couper un plan de contact suivant une droite (s'agissant d'une surface E générique la coïncidence totale du plan tangent et d'un plan de contact n'a lieu qu'en des points exceptionnels).

Au voisinage d'un point non régulier non exceptionnel de E les traces des plans de contact définissent un champ de directions différentiable.

*) On appelle *k-jet d'une fonction* son polynôme de Taylor de degré k.

Donc, le champ des traces des plans de contact sur E se prolonge aux points non réguliers non exceptionnels. Le champ obtenu s'appelle *champ de directions de l'équation* $F = 0$ *sur* E et ses courbes intégrales, *courbes intégrales de l'équation* $F = 0$ *sur* E.

Les projetées des portions de ces courbes comprises entre les points non réguliers sur le plan (t, x) sont localement des courbes intégrales de l'équation correspondante $dx/dt = v(t, x)$ (globalement ceci est faux, même s'il n'existe pas de points non réguliers !).

Le passage du plan à la surface E est souvent payant aussi bien pour l'étude que pour la résolution de l'équation.

EXERCICE 2. Trouver les courbes intégrales de l'équation $\dot{x}^2 = t$ sur la surface $p^2 = t$ et leurs projetées sur le plan (t, x).

Solution. Rapportons E aux coordonnées (p, x). Dans ces coordonnées, l'équation des traces des plans de contact (i.e. $dx = p\,dt$) devient $dx = 2p^2\,dp$. Les courbes intégrales sont $x + C = 2p^3/3$. Leurs projetées sont les paraboles semi-cubiques $(x + C)^2 = 4t^3/9$ (fig. 82). Les points non réguliers forment la ligne $p = 0$. Ils sont tous non exceptionnels.

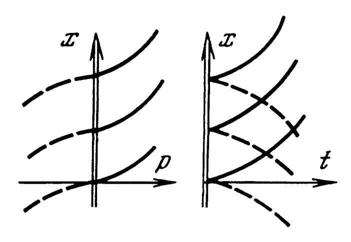


Fig. 82. Projetées des courbes intégrales

La projetée de la ligne des points non exceptionnels sur le plan (t, x) s'appelle *courbe discriminant*. Dans notre cas, la courbe discriminant est l'axe x.

Un point de rebroussement partage la parabole semi-cubique en deux parties. Chacune d'elles est une courbe intégrale de l'une des deux équations $\dot{x} = \sqrt{t}$ (ou $-\sqrt{t}$) dans le demi-plan $t > 0$. On démontre que les projetées sur le plan des courbes intégrales de l'équation générique présentent en un point générique de la courbe discriminant un point de rebroussement (bien plus, au voisinage d'un tel point l'équation se ramène à la forme $\dot{x}^2 = t$ par un difféomorphisme du plan (t, x)). Mais ceci n'est pas valable pour toutes les équations.

EXERCICE 3. Trouver les courbes intégrales de l'équation de Clairaut $x = t\dot{x} - f(\dot{x})$ sur la surface $x = pt - f(p)$, leurs projetées sur le plan (t, x) et la courbe discriminant.

Solution. Rapportons E aux coordonnées (p, t). L'équation des traces des plans de contact ($dx = p\,dt$) devient $t\,dp + p\,dt - f'\,dp = p\,dt$ ou $(t - f')dp = 0$. Les points non réguliers sont définis par $t = f'$. Ils sont tous exceptionnels. Les courbes intégrales sur E ont pour équation $p = \text{const}$ (dans le domaine où $t \neq f'$). Ce sont des droites. Leurs projetées sur le plan (t, x) sont aussi des droites : $x = tC - f(C)$. L'équation de Clairaut est tout simplement l'*équation d'une famille de droites paramétrées par leurs coefficients directeurs*.

La courbe discriminant est définie paramétriquement par les équations $t = f'(C)$, $x = tC - f(C)$. Au voisinage d'un point où $f'' \neq 0$ ces formules définissent une courbe différentiable qui représente la fonction $x = g(t)$. En effet, au voisinage d'un point où $f'' \neq 0$, on peut exprimer C en fonction de t et ensuite x en fonction de t. La droite $x = tC - f(C)$ est tangente à la courbe discriminant en un tel point (pourquoi ?). Ainsi, *la courbe discriminant de l'équation de Clairaut est l'enveloppe de la famille de droites décrite par cette équation.*

Le passage de la fonction f à la fonction g s'appelle *transformation de Le Gendre*. La transformée de Le Gendre de la fonction g sera f (prouvez-le !). Les fonctions f et g sont dites *duales l'une à l'autre*.

EXERCICE 4. Calculer la transformée de Le Gendre de la fonction $|p|^\alpha/\alpha$ ($\alpha > 1$).

Réponse. $|t|^\beta/\beta$, où $\alpha^{-1} + \beta^{-1} = 1$.

La transformation de Le Gendre admet l'interprétation géométrique suivante. Considérons l'ensemble de toutes les droites non verticales (non parallèles à l'axe x) du plan (t, x). Toute droite est définie par son équation $x = at - b$. Donc, les droites non verticales peuvent être traitées comme les points du plan (a, b). Ce plan s'appelle *plan dual du plan initial*. Les coordonnées a et b s'appellent *coordonnées tangentielles* de la droite.

Le plan dual du plan (a, b) est le plan initial (t, x), en raison de la symétrie de l'équation $x + b = at$ par rapport au changement de coordonnées $(t, x) \mapsto (a, b)$: une droite du plan de droites est un point du plan initial.

Soit sur le plan (t, x) une courbe différentiable $x = g(t)$. La tangente à cette courbe varie lorsque le point de contact se déplace sur cette courbe. Le point du plan dual associé à cette tangente décrit une certaine courbe appelée *courbe duale à la courbe initiale*. La courbe duale à la courbe construite est la courbe initiale. Si la courbe initiale est telle que $g'' \neq 0$, sa duale est la courbe représentative de la fonction $b = f(a)$. Les fonctions f et g sont les transformées de Le Gendre l'une de l'autre.

La démonstration de ces faits (dont les généralisations et applications se retrouvent dans tous les domaines des mathématiques) est laissée à titre d'exercice aux esprits curieux.

§ 9. Orbites d'un système autonome

On étudie les propriétés géométriques élémentaires des orbites de systèmes autonomes, i.e. de systèmes dont les seconds membres ne dépendent pas du temps.

1. Systèmes autonomes.

DÉFINITION. On dit qu'un système d'équations différentielles est *autonome* s'il se transforme en lui-même par des translations le long de l'axe t.

En d'autres termes, un système est dit autonome si son second membre est indépendant du temps. Par exemple,

$$x^{(n)} = F(x, \dots, x^{(n-1)})$$

est une équation autonome d'ordre n.

REMARQUE. Les processus évolutifs sont généralement décrits par des systèmes d'équations différentielles autonomes : l'indépendance du second membre par rapport au temps t traduit l'indépendance des lois de la nature par rapport au temps (condition sans laquelle il est impossible de l'étudier scientifiquement). Le terme « autonome » exprime justement l'indépendance de l'évolution de l'état du système envisagé par rapport aux autres. On est confronté aux systèmes non autonomes lorsqu'on décrit la nature le plus souvent de la manière suivante. Supposons que nous étudions la partie I d'un système physique I + II. Bien que la loi d'évolution du système tout entier ne varie pas avec le temps, l'influence de la partie II sur la partie

I peut entraîner une modification de la loi d'évolution de la partie I avec le temps.

Par exemple, l'influence de la Lune sur la Terre est la cause des marées. Mathématiquement, cette influence s'exprime par le fait que l'accélération de la force de gravité qui figure dans l'équation des mouvements des corps terrestres devient variable.

On dit dans de tels cas que la partie I n'est pas autonome. C'est pourquoi tous les systèmes dont le second membre dépend explicitement du temps sont dits non autonomes. Il est évident que les systèmes non autonomes peuvent apparaître dans d'autres cas, par exemple quand on effectue une transformation en résolvant des systèmes autonomes. Exemple : le passage à une équation non autonome à variables séparables lors de l'intégration du système de Lotka-Volterra (pt. 7, § 2).

EXERCICE. L'équation aux variations pour une petite perturbation de la solution d'un système autonome par une petite variation des conditions initiales est-elle autonome ?

Réponse. Oui si la solution non perturbée est l'état d'équilibre, non dans le cas général.

2. Translation par rapport au temps. Commençons par un exemple. Soit l'équation autonome d'ordre n

$$x^{(n)} = F(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}). \tag{1}$$

THÉORÈME 1. *Si* $x = \sin t$ *est solution de l'équation* (1), *il en est de même de* $x = \cos t$.

Ceci résulte directement de la proposition suivante.

THÉORÈME 2. *Soit* $\varphi : \mathbf{R} \to U$ *une solution de l'équation autonome* $\dot{x} = \boldsymbol{v}(x)$ *définie par un champ de vecteurs* $\boldsymbol{v}$ *sur l'espace des phases* U *et soit* $h^s : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *une s-translation de l'axe* t : $h^s(t) = s + t$. *Alors* $\varphi \circ h^s$ *est aussi une solution quel que soit* s.

En d'autres termes, si $x = \varphi(t)$ est solution, il en est de même de $x = \varphi(t + s)$.

Démonstration. Elle est évidente : le champ de directions d'une équation autonome se transforme en lui-même par les translations de l'axe t, donc les courbes intégrales se transforment en courbes intégrales par ces translations.

COROLLAIRE. *Par chaque point de l'espace des phases d'un système autonome il passe une orbite et une seule.*

REMARQUE. Ici et dans la suite les orbites envisagées sont des orbites maximales i.e. des orbites qui sont les images de solutions non prolongeables à un intervalle plus long (une solution $\varphi : I \to U$ n'est pas prolongeable soit parce que l'intervalle I est la droite tout entière, soit parce qu'elle tend vers la frontière du domaine U lorsque t tend vers l'extrémité de l'intervalle I).

D é m o n s t r a t i o n du corollaire. Supposons que par un point il passe deux orbites, images des solutions φ et ψ définies sur la droite tout entière (le cas où les solutions ne sont pas indéfiniment prolongeables est laissé au soin du lecteur). Il existe alors des instants a et b tels que $\varphi(a) = \psi(b)$ (puisque les deux orbites passent par un même point). L'image d'une solution par une translation de l'axe à t est aussi une solution : $\varphi \circ h^{a-b}$. Cette solution et ψ vérifient la même condition initiale pour $t = b$. Elles sont donc confondues, et ψ se déduit de φ par une translation de l'axe t. Ainsi, les images des applications φ et ψ sont confondues. C.Q.F.D.

REMARQUE. Les orbites d'un système *non autonome* (les images des solutions dans l'espace des phases) peuvent bien se couper sans se confondre. Aussi est-il préférable d'étudier les solutions des systèmes non autonomes d'après leurs courbes intégrales.

EXERCICE. Supposons que par chaque point de l'espace des phases du système $\dot{x} = v(t, x)$ il passe une orbite et une seule. En résulte-t-il que ce système est autonome ?

Réponse. Non ; exemple : $\dot{x} = 1 + t^2$.

3. Orbites fermées. Nous savons déjà que les orbites d'un système autonome ne se coupent pas. Voyons maintenant si une orbite se coupe elle-même. En d'autres termes, une solution d'un système autonome du premier ordre peut-elle prendre plusieurs fois la même valeur ?

THÉORÈME. *Une orbite maximale d'un système autonome soit ne se coupe pas, soit dégénère en un point, soit est une orbite fermée (difféomorphe à un cercle).*

Nous avons déjà rencontré des exemples d'orbites fermées (par exemple les cycles limites, cf. § 2).

La démonstration de ce théorème passe par celle des quatre lemmes suivants.

LEMME 1. *Une solution φ d'un système autonome du premier ordre, prenant deux fois la même valeur $\varphi(a) = \varphi(b)$, $b > a$, peut être prolongée à l'axe t tout entier en une application périodique Φ de période $T = b - a$.*

D é m o n s t r a t i o n. Tout s se représente d'une seule façon sous la forme $s = nT + \sigma$, $0 \leqslant \sigma < T$. Posons $\Phi(a + s) = \varphi(a + \sigma)$. Alors Φ est une solution de période T, confondue avec φ sur $[a, b]$. En effet, Φ est confondue avec la translatée de φ au voisinage de chaque point, donc est elle-même une solution (d'après le théorème du pt. 2).

Cette solution peut avoir des périodes autres que T. Etudions l'ensemble de toutes les périodes d'une application de la droite.

LEMME 2. *L'ensemble de toutes les périodes d'une application quelconque de la droite est un sous-groupe du groupe* **R**.

Démonstration. Un nombre T est la période d'une application f si et seulement si une T-translation de la droite envoie f dans f. Les translations qui envoient f dans f forment un sous-groupe du groupe des translations, car si deux telles translations envoient f dans f, il en est de même de leur produit et de leurs réciproques.

REMARQUE. Ce raisonnement montre aussi que si un groupe quelconque opère sur un ensemble quelconque, toutes ses transformations qui laissent invariant un élément fixé de cet ensemble forment un sous-groupe. Ce sous-groupe s'appelle *stabilisateur* de l'élément fixé.

LEMME 3. *L'ensemble de toutes les périodes d'une application continue de la droite est fermé.*

Démonstration. Si la suite des périodes T_i d'une application f converge vers T, alors $f(t + T) = \lim f(t + T_i) = \lim f(t) = f(t)$ quel que soit t.

Donc, *l'ensemble de toutes les périodes d'une application continue de la droite est un sous-groupe fermé de la droite.*

LEMME 4. *Tout sous-groupe fermé G du groupe des réels* **R** *est soit* **R**, *soit une progression arithmétique formée par les multiples entiers d'un certain nombre, soit* $\{0\}$.

Démonstration. Si $G \neq \{0\}$, il contient des éléments positifs (G contient t et $-t$).

On distinguera deux cas :

1) G contient des éléments positifs aussi proches que l'on veut de 0 ;

2) les distances de 0 à tous les éléments positifs du groupe sont strictement supérieures à un certain nombre positif.

Dans le premier cas, G contient des progressions arithmétiques de raisons aussi petites que l'on veut, donc tout voisinage de tout point de la droite contient des éléments de G. Le groupe G étant fermé, on a $G = \mathbf{R}$.

Dans le deuxième cas, considérons l'élément positif T du groupe, le plus proche de 0 (T existe, puisque G est fermé). La progression arithmétique des multiples entiers de T est contenue dans G. Montrons que le groupe ne contient pas d'autres éléments. En effet, tout autre nombre t se représente par $nT + \tau$, où $0 < \tau < T$. Si $t \in G$, alors $t - nT = \tau < T$ est un élément positif du groupe, bien que T soit minimal.

EXERCICE 1. Trouver tous les sous-groupes fermés : 1) du plan $\mathbf{R}^2$, 2) de l'espace $\mathbf{R}^n$, 3) du cercle $S^1 = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$.

Réponse. 1) et 2) les sommes directes de sous-groupes fermés de la droite (fig. 83) ; 3) les n-polygones réguliers formés par les racines n-ièmes de 1, et S^1.

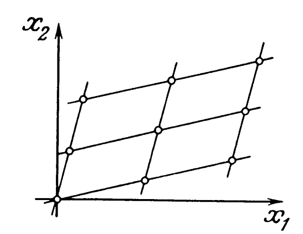


Fig. 83. Sous-groupe fermé du plan

En combinant les lemmes 2, 3 et 4, on conclut que *l'ensemble de toutes les périodes d'une application périodique continue de la droite soit est composé de tous les entiers multiples de la plus petite période, soit est la droite tout entière* (l'application est alors constante).

En particulier, la solution Φ du lemme 1 soit est constante (et alors l'orbite correspondante est une position d'équilibre) soit admet la plus petite période θ. Définissons une application A d'un cercle sur une orbite par la formule A : $(\cos \alpha, \sin \alpha) \mapsto \Phi(\alpha\theta/2\pi)$. L'application A est définie, puisque Φ est de période θ. L'application A est différentiable, puisque Φ est une solution. Elle envoie bijectivement le cercle sur l'orbite, puisque Φ ne peut prendre deux fois la même valeur dans un intervalle égal à la plus petite période (d'après le lemme 1).

La dérivée de A par rapport à α est partout non nulle, sinon la solution prendrait une valeur confondue avec une position d'équilibre et elle serait alors constante d'après le théorème d'unicité. D'après le théorème des fonctions implicites, l'application A est un difféomorphisme local de l'axe α sur l'image de Φ dans l'espace des phases, i.e. sur une orbite. Donc, l'application réciproque de A est différentiable, i.e. A est un difféomorphisme.

Ce qui achève la démonstration du theórème.

Une orbite non fermée peut s'enrouler sur elle-même de façon très compliquée sans néanmoins se couper.

EXERCICE 2. Trouver les adhérences des courbes de phase du pendule double $\ddot{x}_1 = -x_1$, $\ddot{x}_2 = -2x_2$.

Réponse. Un point, des cercles et des tores. Cf. § 24 et § 25, pt. 6.

§ 10. Dérivée suivant un champ de vecteurs et intégrales premières

Bien des notions géométriques peuvent être décrites de deux manières : dans le langage des *points* d'un espace ou bien à l'aide de *fonctions* définies sur cet espace. Une telle dualité est souvent d'une grande utilité dans les diverses branches mathématiques.

On peut notamment décrire les champs de vecteurs soit par des vitesses de mouvements, soit par des *dérivations* de fonctions, quant aux théorèmes fondamentaux de la théorie des équations différentielles, ils peuvent être formulés en termes d'*intégrales premières*.

1. Dérivée suivant un vecteur. Soit $\boldsymbol{v}$ un vecteur appliqué en un point x d'un domaine U, et soient $f : U \to \mathbf{R}$ une fonction différentiable et $\varphi : I \to U$ une courbe paramétrée issue de x à la vitesse $\boldsymbol{v}$, de sorte que $\varphi(0) = x$, $\dot{\varphi}(0) = \boldsymbol{v}$. Considérons l'application composée de I dans $\mathbf{R}$

$$f \circ \varphi : I \to \mathbf{R}, \qquad (f \circ \varphi)(t) = f(\varphi(t)),$$

i.e. une fonction réelle de la variable réelle t (fig. 84).

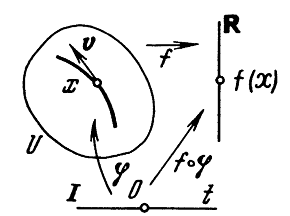


Fig. 84. Dérivée de f suivant $\boldsymbol{v}$

Définition. On appelle *dérivée de la fonction f suivant le vecteur* $\boldsymbol{v}$ la dérivée de la fonction $f \circ \varphi$ en 0.

Ce nombre est désigné par $L_{\boldsymbol{v}} f$ (L en l'honneur de Sophus Lie). Pour justifier cette définition, il nous faut vérifier que le nombre obtenu dépend uniquement du vecteur $\boldsymbol{v}$ mais pas d'un choix spécial de la courbe φ. Ce que l'on établit par exemple en exprimant la dérivée suivant $\boldsymbol{v}$ en fonction des coordonnées : la règle de dérivation d'une fonction composée nous donne

$$L_{\boldsymbol{v}} f = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f \circ \varphi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} v_i,$$

où les dérivées sont prises au point d'application du vecteur $\boldsymbol{v}$: ici x_i sont des coordonnées au voisinage de ce point d'application, v_i les composantes du vecteur vitesse $\boldsymbol{v}$ dans ce système de coordonnées.

On exprime ceci autrement en disant que $L_{\boldsymbol{v}} f$ est la valeur de la 1-forme $\mathrm{d}f$ sur le vecteur $\boldsymbol{v}$.

Exercice. Calculer la dérivée d'une fonction H suivant le vecteur $\sum \left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}\right)$.

Réponse. 0.

2. Dérivée suivant un champ de vecteurs. Soit $\boldsymbol{v}$ un champ de vecteurs sur un domaine U.

DÉFINITION. On appelle *dérivée d'une fonction* $f : U \to \mathbf{R}$ *suivant le champ* $\boldsymbol{v}$ la nouvelle fonction $L_{\boldsymbol{v}}f : U \to \mathbf{R}$ qui en tout point x est égale à la dérivée de f suivant le vecteur appliqué en x : $(L_{\boldsymbol{v}}f)(x) = L_{\boldsymbol{v}(x)}f$. La fonction $L_{\boldsymbol{v}}f$ s'appelle aussi *dérivée de Lie* de la fonction f.

EXEMPLE. Soit $\boldsymbol{v} = \partial/\partial x_1$ un champ de vecteurs de base dont les composantes sont $(1, 0, \dots, 0)$ dans le système de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$. Alors $L_{\boldsymbol{v}}f = \partial f/\partial x_1$ est la dérivée partielle de la fonction f.

AVERTISSEMENT. En manipulant les dérivées partielles il faut bien s'ancrer dans l'esprit que leur notation recèle en elle-même un danger : la dérivée partielle de la fonction f par rapport à x_1 dépend non seulement de la fonction prise pour coordonnée x_1 dans le domaine envisagé mais encore de la manière dont ont été choisies les autres coordonnées. Par exemple, dans le plan de coordonnées (x, y) la dérivée partielle $\partial f/\partial x$ de la fonction y est nulle, mais la dérivée $\partial f/\partial x$ de la même fonction par rapport à la même variable x dans un système de coordonnées (x, z), où $z = x + y$, est égale à -1. Il faudrait écrire $\partial f/\partial x|_{y=\text{const}}$, $\partial f/\partial x|_{z=\text{const}}$.

La dérivée d'une fonction suivant un champ de vecteurs ne souffre pas de ce défaut de la dérivée partielle : c'est un objet géométrique qui, par sa définition, ne dépend d'aucun système de coordonnées. Si la fonction différentiable f et le champ différentiable $\boldsymbol{v}$ sont donnés, $L_{\boldsymbol{v}}f$ est une fonction bien définie (de classe C^{r-1} si f et $\boldsymbol{v}$ sont de classe C^r). En d'autres termes, si un difféomorphisme opère sur un champ de vecteurs et sur une fonction, la dérivée de la fonction image suivant le champ image est confondue avec l'image de la dérivée de la fonction initiale suivant le champ initial. L'opération de différentiation suivant une direction est dite *naturelle* pour cette propriété. Les autres opérations naturelles sont l'addition et la multiplication des fonctions, l'addition des champs et la multiplication de fonctions par un champ.

3. Propriétés de la dérivée suivant une direction. Nous allons de nouveau nous pencher sur la formalisation de faits évidents. Soit F l'ensemble de toutes les fonctions indéfiniment différentiables $f : U \to \mathbf{R}$. Cet ensemble est muni d'une structure naturelle d'espace vectoriel réel (puisque l'addition des fonctions préserve la différentiabilité) et même d'une structure d'anneau (puisque le produit de fonctions indéfiniment différentiables est une fonction indéfiniment différentiable) ou, mieux encore, d'une structure de $\mathbf{R}$-algèbre (i.e. un anneau muni de la multiplication par un nombre, vérifiant les conditions habituelles).

Soit $\boldsymbol{v}$ un champ de vecteurs indéfiniment différentiable sur U. La dérivée d'une fonction de F suivant le champ $\boldsymbol{v}$ appartient de nouveau à F (la

différentiabilité infinie est essentielle ici). Ainsi, la différentiation suivant le champ $\boldsymbol{v}$ est une application $L_v : F \to F$ de l'algèbre des fonctions indéfiniment différentiables dans elle-même. Considérons quelques propriétés de cette application :

1. $L_v(f + g) = L_v f + L_v g$; 2. $L_v(fg) = fL_v g + gL_v f$;
3. $L_{u+v} = L_u + L_v$; 4. $L_{fu} = fL_u$;
5. $L_u L_v = L_v L_u$,

f et g étant des fonctions différentiables, $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ des champs de vecteurs différentiables.

EXERCICE 1. Démontrer les propriétés 1 à 5 à l'exception d'une seule qui est fausse.

REMARQUE TERMINOLOGIQUE. Les algébristes disent d'une application d'un anneau (commutatif) dans lui-même qu'elle est une *dérivation* si elle est douée des propriétés 1) et 2) de l'application L_v. Les dérivations d'un anneau forment un *module* sur cet anneau (un module sur un anneau est la généralisation d'un espace vectoriel sur **R** : les éléments d'un module peuvent être additionnés entre eux et multipliés par des éléments d'un anneau).

Les champs de vecteurs sur U forment un module sur la **R**-algèbre F des fonctions dans U. Les propriétés 3 et 4 expriment que l'opération L qui fait correspondre au champ de vecteurs $\boldsymbol{v}$ la dérivation L_v est un homomorphisme du F-module des champs dans le F-module des dérivations de l'algèbre F. La propriété 5, si elle a lieu, signifie que les dérivations L_u et L_v commutent.

EXERCICE* 2. L'homomorphisme L est-il un isomorphisme ?

Pour les analystes, l'application $L_v : F \to F$ est un *opérateur différentiel, linéaire et homogène du premier ordre.* Cette dénomination s'explique par le fait que l'opérateur $L_v : F \to F$ est **R**-linéaire d'après les propriétés 1 et 2. Dans les coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ cet opérateur s'écrit sous la forme suivante : $L_v = v_1\, \partial/\partial x_1 + \ldots + v_n \partial/\partial x_n$. Plus haut nous avons désigné le champ de vecteurs $\boldsymbol{v}$ par le même symbole (page 69) : le champ $\boldsymbol{v}$ est souvent identifié à l'opérateur de dérivation suivant $\boldsymbol{v}$.

Par analogie, on peut définir L_v non seulement pour les fonctions mais aussi pour des objets différentiels et géométriques transportables par des difféomorphismes (champs de vecteurs, formes, tenseurs) : la dérivée de chaque objet sera alors un objet de même nature. Les mathématiciens français appellent l'opérateur L_v *dérivée du pêcheur* : un pêcheur est assis au bord d'une rivière et dérive les corps portés par le flot.

4. Algèbre de Lie des champs de vecteurs. La propriété 5 des champs de vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ n'est pas toujours remplie. Pour les champs $\boldsymbol{u} = \partial/\partial x$ et

$v = x\partial/\partial x$ sur l'axe x par exemple, on a

$$L_u L_v = \partial/\partial x + x\partial^2/\partial x^2, \qquad L_v L_u = x\partial^2/\partial x^2.$$

EXERCICE 1. Montrer que l'opérateur différentiel $L_a L_b - L_b L_a = L_c$, où c est un champ de vecteurs dépendant des champs a et b, est du premier ordre et non pas du second comme on pourrait le croire à première vue.

DÉFINITION. Le champ c s'appelle *commutateur* ou *crochet de Poisson* des champs a et b et se note $[a, b]$.

EXERCICE 2. Etablir les trois propriétés suivantes du commutateur :

1. $[a, b + \lambda c] = [a, b] + \lambda[a, c]$, $\lambda \in \mathbf{R}$ (linéarité).
2. $[a, b] + [b, a] = 0$ (antisymétrie).
3. $[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0$ (identité de Jacobi).

DÉFINITION. Un espace vectoriel muni d'une opération binaire jouissant des propriétés 1, 2 et 3 s'appelle *algèbre de Lie.*

Ainsi, *les champs de vecteurs munis de la commutation engendrent une algèbre de Lie.* La commutation est une opération aussi fondamentale en mathématiques que l'addition et la multiplication.

EXERCICE 3. Montrer qu'un espace euclidien orienté à trois dimensions, muni du produit vectoriel est une algèbre de Lie.

EXERCICE 4. Montrer que l'espace des matrices carrées d'ordre n, muni de l'opération $AB - BA$ est une algèbre de Lie.

EXERCICE 5. L'espace des matrices symétriques, muni de l'opération $AB - BA$ est-il une algèbre de Lie ? Même question pour les matrices antisymétriques.

EXERCICE 6. En supposant connues les composantes des champs a et b dans un système de coordonnées, déterminer les composantes de leur commutateur.

Réponse. $[a, b]_i = \sum a_j \partial b_i/\partial x_j - b_j \partial a_i/\partial x_j = L_a b_i - L_b a_i$.

EXERCICE 7. Soient $\{g^t\}$ et $\{h^s\}$ des flots définis respectivement par des champs a et b. Montrer que ces flots commutent (i.e. $g^t h^s \equiv h^s g^t$) si et seulement si le commutateur des champs a et b est nul.

EXERCICE 8. Soit a_ω le champ de vecteurs vitesses des points d'un solide en rotation, animé d'une vitesse angulaire ω autour du point 0 dans $\mathbf{R}^3$. Trouver le commutateur des champs a_α et a_β.

Réponse. $[a_\alpha, a_\beta] = a_\gamma$, où γ est le produit vectoriel de α et de β.

5. Intégrales premières. Soit v un champ de vecteurs sur un domaine U et soit $f : U \to \mathbf{R}$ une fonction différentiable.

DÉFINITION. Une fonction f est une *intégrale première* de l'équation différentielle $\dot{x} = v(x)$ si sa dérivée suivant le champ v est nulle : $L_v f \equiv 0$.

L'étrange expression « intégrale première » est demeurée en usage depuis l'époque où l'on s'efforçait de résoudre toutes les équations différentielles par intégration. On appelait alors intégrale (ou intégrale particulière) ce que, aujourd'hui, nous appelons solution.

Les deux propriétés suivantes de l'intégrale première sont visiblement équivalentes à la relation $L_v f \equiv 0$ et auraient pu servir à la définir :

1. *La fonction f est constante sur chaque solution $\varphi : I \to U$*, i.e. *chaque fonction $f \circ \varphi$ est constante.*

2. *Chaque orbite appartient à un ensemble de niveau et un seul de la fonction f* (fig. 85).

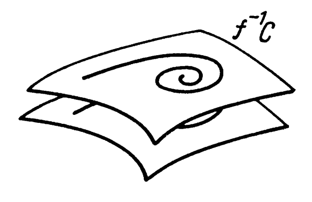


Fig. 85. L'orbite est entièrement située sur une surface de niveau de l'intégrale

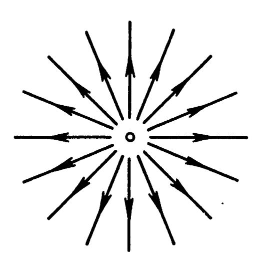


Fig. 86. Système sans intégrales premières

EXEMPLE 1. Considérons le système $\dot{x}_1 = x_1, \dot{x}_2 = x_2$ dont l'espace des phases est le plan tout entier. Les orbites (des demi-droites) sont représentées sur la figure 86. Montrons que ce système n'admet aucune intégrale première distincte d'une constante. En effet, toute intégrale première est une fonction continue sur le plan tout entier et constante sur chaque demi-droite issue de l'origine des coordonnées. Elle est donc constante.

EXERCICE 1. Montrer que toute intégrale première est constante dans un voisinage du cercle limite.

EXERCICE 2. Pour quelles valeurs de k le système d'équations $\dot{x}_1 = x_1, \dot{x}_2 = kx_2$ défini sur le plan tout entier possède-t-il une intégrale première non constante ?

Réponse. Pour $k \leqslant 0$ (cf. fig. 30 de la page 38).

EXERCICE 3. Monter que l'ensemble de toutes les intégrales premières d'un champ est muni d'une structure d'algèbre : la somme et le produit d'intégrales premières sont des intégrales premières.

Les intégrales premières non constantes sont rares. Mais quand elles existent et qu'on arrive à les trouver, on est fort bien récompensé.

EXEMPLE 2. Soit H une fonction r-différentiable ($r \geqslant 2$) de $2n$ variables $(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n)$. Le système de $2n$ équations

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

s'appelle *système d'équations canoniques de Hamilton*. (Hamilton a montré que les équations différentielles d'un grand nombre de problèmes de mécanique, d'optique, de calcul des variations, etc., pouvaient se ramener à cette forme.) La fonction H s'appelle *fonction de Hamilton* (en mécanique c'est généralement l'énergie totale d'un système).

THÉORÈME (principe de conservation de l'énergie). *La fonction H est une intégrale première du système d'équations canoniques de Hamilton.*

Démonstration.

$$L_v H = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial H}{\partial p_i} \left(- \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} \right] = 0.$$

C.Q.F.D.

6. Intégrales premières locales. L'absence d'intégrales premières non constantes est due à la structure topologique des orbites. En général, les orbites ne sont entièrement contenues sur la surface de niveau d'aucune fonction, aussi n'existe-t-il point d'intégrales premières non constantes. Cependant localement, au voisinage d'un point non singulier, les orbites possèdent une structure simple, et les intégrales premières non constantes existent.

Soient U un domaine d'un espace euclidien à n dimensions, $\boldsymbol{v}$ un champ de vecteurs différentiable sur U et x_0 un point non singulier de $\boldsymbol{v}$ ($\boldsymbol{v}(x_0) \neq 0$).

THÉORÈME. *Il existe un voisinage V du point x_0 tel que l'équation $\dot{x} = \boldsymbol{v}(x)$ sur V possède $n-1$ intégrales premières fonctionnellement indépendantes $f_1, \ldots, f_{n-1}$, et de plus toute intégrale première de cette équation est une fonction de $f_1, \ldots, f_{n-1}$.*

On rappelle que m fonctions $f_1, \ldots, f_m : U \to \mathbf{R}$ sont *fonctionnellement indépendantes* au voisinage du point x_0 si le rang de la dérivée en x_0 de l'application $f : U \to \mathbf{R}^m$ définie par les fonctions $f_1, \ldots, f_m$ est égal à m (cf. par exemple, G. Fikhtengoltz, *Cours de calcul différentiel et intégral*, « Naouka », 1970, t. 1, chap. 6 (en russe)).

Démonstration. Le théorème est évident pour l'équation standard dans $\mathbf{R}^n$

$$\dot{y}_1 = 1, \quad \dot{y}_2 = \ldots = \dot{y}_n = 0,$$

les intégrales premières étant des fonctions différentiables arbitraires de $y_2, \ldots, y_n$. Ce theórème est aussi valable pour cette équation dans tout domaine convexe (un domaine est convexe s'il contient le segment joignant deux quelconques de ses points). Dans un domaine convexe, toute intégrale première de l'équation standard se ramène à une fonction de $y_2, \ldots, y_n$. Toute équation définie dans un voisinage convenable d'un point non singulier se ramène à la forme standard dans un système de coordonnées y convenablement choisi. Le voisinage en question peut être supposé convexe dans les coordonnées y (sinon il faut le remplacer par un voisinage convexe plus petit).

Reste à remarquer que la propriété d'une fonction d'être intégrale première et la propriété d'indépendance fonctionnelle sont indépendantes du système de coordonnées.

EXERCICE. Citer un exemple de domaine dans lequel l'équation standard admet une intégrale première ne se ramenant pas à une fonction de $y_2, \dots, y_n$.

7. Intégrales premières dépendant du temps. Soit f une fonction différentiable sur l'espace des phases élargi de l'équation, en général non autonome, $\dot{x} = \mathbf{v}(t, x)$.

Formons le système autonome dont les orbites seront courbes intégrales de l'équation initiale. A cet effet, élargissons cette équation en lui ajoutant l'équation triviale $\dot{t} = 1$:

$$\dot{X} = V(X), \quad X = (t, x), \quad V(t, x) = (1, \mathbf{v}).$$

DÉFINITION. On dit qu'une fonction f est une *intégrale première dépendant du temps* de l'équation $\dot{x} = \mathbf{v}(t, x)$ si elle est intégrale première de l'équation autonome élargie (fig. 87).

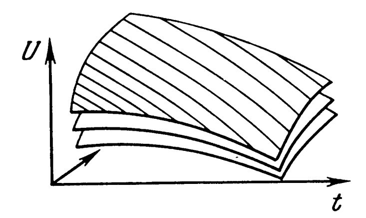


Fig. 87. Courbes intégrales sur une surface de niveau d'une intégrale première dépendant du temps

En d'autres termes : *chaque courbe intégrale de l'équation initiale est située sur un ensemble de niveau de la fonction f.*

Le champ de vecteurs V ne s'annule pas. D'après le théorème ci-dessus, *au voisinage de chaque point de l'espace des phases élargi, l'équation* $\dot{x} = \mathbf{v}(t, x)$ *possède autant d'intégrales premières fonctionnellement indépendantes* (*dépendant du temps*) *que la dimension de l'espace des phases* (*le nombre de composantes du vecteur* $\mathbf{x}$) ; *de plus, chaque intégrale première* (*dépendant du temps*) *s'exprime en fonction d'elles dans ce voisinage.*

En particulier, l'équation autonome initiale à espace des phases à n dimensions admet au voisinage de tout point (éventuellement singulier) n intégrales premières fonctionnellement indépendantes qui sont fonctions du temps.

On appelle intégrale première d'une équation différentielle (ou d'un système d'équations différentielles) d'ordre quelconque une intégrale première du système du premier ordre équivalent.

EXERCICE 1. Montrer que le système d'équations de Newton $\ddot{r} = -r/r^3$ admet une intégrale première qui en coordonnées polaires est de la forme $r^2\dot{\varphi}$ ($r \in \mathbf{R}^2$).

Cette intégrale appelée *vitesse aréolaire* a été découverte par Kepler au cours des observations du mouvement de Mars (« deuxième loi de Kepler »).

EXERCICE 2. Montrer que la vitesse aréolaire est intégrale première de l'équation $\ddot{r} = ra(r)$, quelle que soit la forme de la fonction a.

Un champ de forces de la forme $ra(r)$ s'appelle *central*. L'exercice précédent montre pourquoi on ne peut déduire la loi de la gravitation universelle de la deuxième loi de Kepler : il faut une troisième loi.

EXERCICE 3. Montrer que si un mouvement a lieu dans un champ central quelconque de l'espace, chaque composante du produit vectoriel $[r, \dot{r}]$ est une intégrale première (« la loi de la conservation du moment cinétique »).

EXERCICE 4. Montrer que si la fonction de Hamilton est indépendante de q_i, alors p_i est une intégrale première des équations de Hamilton.

EXERCICE 5. Supposons que chaque solution de l'équation $\dot{x} = v(t, x)$ définie sur un espace des phases à n dimensions est prolongeable à l'axe t tout entier. Montrer que cette équation possède dans l'espace des phases élargi n intégrales premières fonctionnellement indépendantes (fonctions du temps) en fonction desquelles s'expriment toutes les intégrales premières (dépendant du temps).

§ 11. Equations linéaires et quasi linéaires aux dérivées partielles du premier ordre

Les équations aux dérivées partielles sont bien moins étudiées que les équations différentielles ordinaires. La théorie d'une seule équation aux dérivées partielles du premier ordre peut être ramenée à l'étude d'équations différentielles ordinaires spéciales appelées *équations des caractéristiques*. Ce lien est dû au fait qu'un milieu continu constitué de particules indépendantes est susceptible d'être décrit aussi bien par des équations différentielles ordinaires du mouvement de ces particules que par une équation aux dérivées partielles pour un champ. Plus bas, on étudie en détail des cas particuliers élémentaires d'équations linéaires et quasi linéaires aux dérivées partielles du premier ordre et on exhibe une méthode de résolution de l'équation générale.

1. Equation homogène linéaire.

DÉFINITION. On appelle *équation homogène linéaire du premier ordre* dans un domaine U l'équation

$$L_a u = 0,$$

où a est un champ de vecteurs défini sur U, u une fonction inconnue. Dans les coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ cette équation s'écrit

$$a_1 \partial u/\partial x_1 + \ldots + a_n \partial u/\partial x_n = 0, \qquad a_k = a_k(x_1, \ldots, x_n).$$

Les orbites du champ de vecteurs a s'appellent *caractéristiques* de l'équation $L_a u = 0$. L'équation $\dot{x} = a(x)$ porte le nom d'*équation des caractéristiques*.

REMARQUE. En mathématiques, l'adjectif « caractéristique » signifie toujours « lié intrinsèquement » (dans le cas envisagé, indépendamment du choix du système de coordonnées). Ainsi, un sous-groupe caractéristique d'un groupe est un sous-groupe invariant par tous les automorphismes du groupe, l'équation caractéristique de la matrice d'un opérateur est indépendante du choix de la base, en topologie les classes caractéristiques sont invariantes par les difféomorphismes, etc.

Les caractéristiques de l'équation $L_a u = 0$ lui sont intrinsèquement liées par rapport aux difféomorphismes : si un difféomorphisme envoie cette équation dans une autre, il enverra ses caractéristiques dans celles de son image. On peut de surcroît multiplier le champ $\boldsymbol{a}$ par une fonction non nulle sans pour autant modifier les solutions et les caractéristiques de l'équation.

EXERCICE 1. Trouver les caractéristiques de l'équation $\partial u/\partial x = y\,\partial u/\partial y$.
Solution. $\dot{x} = 1, \dot{y} = -y\,;\, y = Ce^{-x}$.

THÉORÈME. *Une fonction u est solution de l'équation $L_a u = 0$ si et seulement si elle est intégrale première de l'équation des caractéristiques.*

Démonstration. On reconnaît ici la définition d'une intégrale première.

Malgré sa trivialité, ce théorème est d'une grande utilité dans la mesure où l'équation ordinaire des caractéristiques est bien plus facile à résoudre que l'équation initiale aux dérivées partielles.

EXERCICE 2. Intégrer l'équation de l'exercice 1.
Solution. $u = ye^x$ est une solution. Toutes les autres solutions sont fonctions de u.
EXERCICE 3. Intégrer l'équation $y\,\partial u/\partial x = x\,\partial u/\partial y$ sur le plan tout entier.
Réponse. Les solutions sont fonctions de $x^2 + y^2$.
EXERCICE 4. Les solutions de l'équation $x\,\partial u/\partial x = y\,\partial u/\partial y$ sur $\mathbf{R}^2$ sont-elles toutes fonctions de xy ?
Réponse. Non, il existe une solution telle que $u(1, 1) \neq u(-1, -1)$.

2. Problème de Cauchy.

DÉFINITION. On appelle *problème de Cauchy* pour l'équation $L_a u = 0$ le problème qui consiste à trouver la fonction u qui vérifie la condition $u|_\gamma = \varphi$, où γ est une hypersurface et φ une fonction donnée sur cette hypersurface. (On appelle hypersurface de $\mathbf{R}^n$ une surface à $n - 1$ dimensions. Par exemple, pour $n = 2$, une hypersurface est une courbe, pour $n = 3$, une surface ordinaire.)

L'hypersurface γ s'appelle *hypersurface initiale*, la condition $u|_\gamma = \varphi$, *condition initiale* et la fonction φ, *fonction initiale*.

Le problème de Cauchy n'admet pas toujours une solution. En effet, la solution u est constante sur chaque caractéristique. Or une caractéristique est susceptible de couper plusieurs fois la surface γ (fig. 88). Si la fonction donnée φ prend des valeurs distinctes en ces points, le problème de Cauchy ne possède de solution dans aucun domaine contenant cette caractéristique.

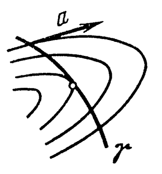


Fig. 88. Problème de Cauchy n'admettant pas de solution

DÉFINITION. On dit qu'un point x de l'hypersurface initiale γ est *non caractéristique* si la caractéristique passant par lui est transversale (non tangente) à γ.

THÉORÈME. *Soit x un point non caractéristique de l'hypersurface initiale γ. Il existe alors un voisinage de x tel que le problème de Cauchy possède une solution et une seule dans ce voisinage.*

Démonstration. Le théorème de redressement nous dit qu'on peut choisir, au voisinage du point x, des coordonnées telles que les composantes du champ $\boldsymbol{a}$ soient $(1, 0, \ldots, 0)$ et l'équation de γ prenne la forme $x_1 = 0$. Dans ces coordonnées, le problème de Cauchy devient

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \quad u|_{x_1=0} = \varphi.$$

L'unique solution dans un domaine convexe est $u(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(x_2, \ldots, x_n)$.

EXERCICE 1. Résoudre le problème de Cauchy $u|_{x=0} = \sin y$ pour l'équation $\partial u/\partial x = y\partial u/\partial y$.

Solution. Sur toute caractéristique on a $y = Ce^{-x}$; d'après la condition initiale, $u = \sin C$.

Réponse. $u = \sin(e^x y)$.

EXERCICE 2. Quels sont les points de la droite $x = 1$ qui sont non caractéristiques pour l'équation $y\partial u/\partial x = x\partial u/\partial y$?

Réponse. $y \neq 0$.

EXERCICE 3. Le problème de Cauchy $u|_{x=1} = y^2$ pour cette équation sur $\mathbf{R}^2$ admet-il une solution ? Cette solution est-elle unique ?

Réponse. Il existe une solution qui n'est pas unique.

REMARQUE. Les solutions de toute équation différentielle ordinaire forment une variété finidimensionnelle : chaque solution est définie par une collection finie de nombres (de conditions initiales). On voit que l'équation

homogène linéaire aux dérivées partielles du premier ordre par rapport à une fonction de n variables possède « autant de solutions qu'il n'existe de fonctions de $n - 1$ variables ». Il en va de même pour les équations générales aux dérivées partielles du premier ordre.

Ceci s'explique si l'on traite une équation différentielle comme la limite d'équations aux différences. Les mêmes considérations nous suggèrent la donnée, pour une équation aux dérivées partielles du second ordre, de deux fonctions sur l'hypersurface initiale (les valeurs de la solution et de sa dérivée suivant une direction transversale à l'hypersurface initiale), etc. Il va de soi que ces considérations ne sauraient se substituer aux démonstrations des théorèmes respectifs d'existence et d'unicité des solutions. Ces démonstrations sont accessibles dans les ouvrages de théorie des équations différentielles aux dérivées partielles et notamment dans R. Courant et D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, New York, 1953.

3. Equation linéaire non homogène.

DÉFINITION. On appelle *équation linéaire non homogène du premier ordre* dans un domaine U l'équation

$$L_a u = b,$$

où $\boldsymbol{a}$ est un champ de vecteurs donné, b une fonction donnée, u la fonction cherchée dans U. Dans les coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ cette équation s'écrit

$$a_1 \partial u/\partial x_1 + \dots + a_n \partial u/\partial x_n = b,$$

où a_k et b sont des fonctions connues de $x_1, \dots, x_n$.

Le problème de Cauchy se pose comme pour l'équation homogène.

THÉORÈME. *Dans un voisinage assez petit de tout point non caractéristique de la surface initiale il existe une solution et une seule.*

Démonstration. La dérivée de la fonction inconnue par rapport au temps du mouvement le long d'une caractéristique est connue (elle est égale à b), donc son accroissement le long d'une portion de caractéristique est égal à l'intégrale de b par rapport au temps du mouvement le long de cette portion. Par exemple, si $a_1 \neq 0$ au point envisagé, cet accroissement est égal à $\int b/a_1 \, dx_1$ le long de cette portion de caractéristique.

EXERCICE. Résoudre le problème de Cauchy $u|_{x=0} = \sin y$ pour l'équation $\partial u/\partial x = y \partial u/\partial y + y$.

Solution. Lorsque x varie à la vitesse 1, la valeur de u varie à la vitesse Ce^{-x} sur la caractéristique $y = Ce^{-x}$. Donc, l'accroissement de u sur cette caractéristique est égal à $C(1 - e^{-X})$ lorsque x varie de 0 à X.

Le point (X, Y) est situé sur la caractéristique pour laquelle $C = e^X Y$. En ce point, $u = \sin C + C(1 - e^{-X})$.

Réponse. $u = \sin(e^x y) + y(e^x - 1)$.

4. Equation quasi linéaire.

DÉFINITION. On appelle *équation quasi linéaire du premier ordre* l'équation

$$L_\alpha u = \beta,$$

où $\alpha(x) = a(x, u(x))$, $\beta(x) = b(x, u(x))$; a un champ de vecteurs sur l'espace des x dépendant d'un point de l'axe u comme d'un paramètre, b une fonction définie sur l'espace des x et dépendant aussi d'un point de l'axe u comme d'un paramètre. Dans les coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ cette équation s'écrit

$$a_1(x, u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + a_n(x, u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = b(x, u).$$

La seule différence avec l'équation linéaire est que *les coefficients a et b sont susceptibles de dépendre des valeurs de la fonction inconnue.*

EXEMPLE. Considérons un milieu à une dimension, constitué de particules se déplaçant chacune par inertie sur une droite à une vitesse constante. Désignons par $u(t, x)$ la vitesse d'une particule se trouvant en x à l'instant t. Ecrivons l'équation de Newton : l'accélération de la particule est nulle. Si $x = \varphi(t)$ représente le chemin parcouru par la particule, alors

$$\dot{\varphi} = u(t, \varphi(t))$$

et

$$\ddot{\varphi} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\dot{\varphi} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Ainsi, *le champ de vitesses d'un milieu composé de particules indépendantes vérifie l'équation quasi linéaire*

$$u_t + uu_x = 0.$$

EXERCICE 1. Construire le graphique de la solution à l'instant t si $u = \operatorname{Arccotg} x$ pour $t = 0$.

Solution. Le difféomorphisme $(x, u) \mapsto (x + ut, u)$ transporte chaque droite $u = \text{const}$ d'une distance ut le long de l'axe x et envoie le graphique de la solution à l'instant 0 dans celui de la solution à l'instant t (ce difféomorphisme n'est autre qu'une transformation du flot de l'équation de Newton pour les particules ; le plan (x, u) est le plan de phase de la particule).

Réponse. Cf. fig. 89.

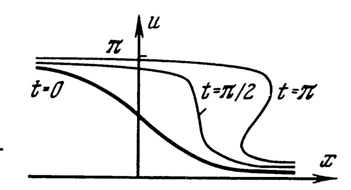


Fig. 89. Le graphique de la solution est l'image du graphique de la condition initiale par le flot

REMARQUE. Pour $t \geqslant \pi/2$ il n'existe pas de solution différentiable. A partir de cet instant les particules se heurtent et la condition d'absence d'interaction entre les particules devient physiquement irréelle. Dans ces conditions, le mouvement du milieu est décrit par des ondes de choc qui sont des fonctions discontinues vérifiant l'équation à gauche et à droite du point de discontinuité et satisfaisant en ce point à des hypothèses supplémentaires de nature physique (dépendant de la manière dont les particules interagissent au moment du choc).

EXERCICE 2. Former l'équation d'évolution du champ de vitesses d'un milieu de particules indépendantes dans un champ de forces $F(x)$ en x.

Réponse. $u_t + uu_x = F$.

EXERCICE 3. Résoudre cette équation, avec la condition initiale $u|_{t=0} = 0$ pour la force $F(x) = -x$.

Solution. Le flot est composé de rotations, donc le graphique de $u(t, \cdot)$ est une droite de coefficient directeur $-t$.

Réponse. $u(t, x) = -x \operatorname{tg} t$, $|t| < \pi/2$.

EXERCICE 4. Trouver la largeur maximale de la bande $0 \leqslant t < C$ qui contient la solution de l'équation $u_t + uu_x = \sin x$ qui vérifie la condition initiale $u|_{t=0} = 0$.

Réponse. $C = \pi/2$.

5. Caractéristiques de l'équation quasi linéaire. L'exemple traité montre l'intérêt qu'il y a de passer de l'équation aux dérivées partielles pour le champ de vitesses aux équations différentielles ordinaires du mouvement des particules du milieu. Ceci vaut également pour l'équation quasi linéaire générale du premier ordre.

L'équation $L_{a(x,\, u(x))}u = b(x, u(x))$ exprime que si le point x commence à se déplacer à partir du point x_0 à la vitesse $a_0 = a(x_0, u_0)$, où $u_0 = u(x_0)$, la valeur de $u(x)$ commence à varier à la vitesse $b_0 = b(x_0, u_0)$ (fig. 90). En d'autres termes, le vecteur $A_0(x_0, u_0)$ appliqué au point (x_0, u_0) du produit direct de l'espace des x par l'axe u, de composantes a_0 et b_0 est tangent au graphique de la solution. Supposons que $A_0 \neq 0$.

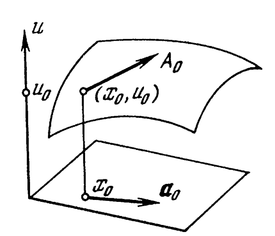


Fig. 90. Interprétation géométrique de l'équation quasi linéaire

DÉFINITION. La direction du vecteur A_0 s'appelle *direction caractéristique* de l'équation quasi linéaire au point (x_0, u_0).

Les directions caractéristiques forment un champ de directions sur le domaine de définition des coefficients de l'équation.

Ce champ s'appelle *champ de directions caractéristique* de l'équation. En coordonnées, les directions caractéristiques sont les directions du

champ de vecteurs

$$A = \sum a_k(x, u) \frac{\partial}{\partial x_k} + b(x, u) \frac{\partial}{\partial u}.$$

L'équation différentielle définie par un champ de directions caractéristiques s'appelle *équation des caractéristiques* et ses courbes intégrales, *caractéristiques*. Donc, les caractéristiques sont les orbites du champ de vecteurs A.

EXERCICE 1. Trouver les caractéristiques de l'équation d'un milieu constitué de particules indépendantes : $u_t + uu_x = 0$.

Solution. $\dot{x} = u$, $\dot{t} = 1$, $\dot{u} = 0$. Les caractéristiques sont les droites $x = x_0 + u_0 t$, $u = u_0$.

REMARQUE 1. L'équation linéaire est un cas particulier de l'équation quasi linéaire mais ses caractéristiques sont différentes selon qu'elle est traitée comme une équation quasi linéaire ou comme une équation linéaire : les caractéristiques de la première sont situées dans l'espace produit, les caractéristiques de la seconde sont les projetées des premières sur l'espace des x.

REMARQUE 2. Les équations quasi linéaires conservent leur forme par les difféomorphismes de l'espace des x et même par les difféomorphismes de l'espace produit sur lequel sont définis les coefficients a et b. Les caractéristiques sont intrinsèquement liées à l'équation : si un tel difféomorphisme envoie une équation dans une autre, les caractéristiques de l'équation initiale sont envoyées dans celles de l'équation image. Bien plus, l'équation peut être multipliée par une fonction non nulle de x et de u sans que les solutions et les caractéristiques soient modifiées (bien que le champ de vecteurs A change).

EXERCICE 2. Montrer que l'équation quasi linéaire se ramène par un difféomorphisme local convenable de l'espace produit à la forme $\partial u/\partial x_1 = 0$ au voisinage de tout point (x, u) dans lequel a est non nul.

6. Intégration de l'équation quasi linéaire. Il est d'usage d'écrire l'équation des caractéristiques de l'équation $\sum a_k \partial u/\partial x_k = b$ sous la *forme symétrique*

$$\frac{dx_1}{a_1} = \dots = \frac{dx_n}{a_n} = \frac{du}{b}$$

qui exprime la colinéarité des tangentes aux caractéristiques et des vecteurs caractéristiques (ces relations traduisent l'égalité des 1-formes sur les vecteurs tangents aux caractéristiques si les dénominateurs sont non nuls).

DÉFINITION. On appelle *surface intégrale* d'un champ de directions une surface en chaque point de laquelle la direction du champ est contenue dans le plan tangent à cette surface.

THÉORÈME 1. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface différentiable soit surface intégrale d'un champ de directions différentiable est que chaque courbe intégrale ayant un point commun avec cette surface soit entièrement contenue dans cette surface.*

Démonstration. D'après le théorème de redressement, ce champ peut être transformé en un champ de droites parallèles par un difféomorphisme. Ce théorème est évident pour un tel champ.

La définition d'une direction caractéristique entraîne le

THÉORÈME 2. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction u soit solution d'une équation quasi linéaire est que son graphique soit surface intégrale d'un champ de directions caractéristiques.*

Ces deux théorèmes entraînent immédiatement le

COROLLAIRE. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction u soit solution d'une équation quasi linéaire est que son graphique contienne avec chacun de ses points une portion de caractéristique passant par ce point.*

L'intégration d'une équation quasi linéaire se ramène donc à la détermination de ses caractéristiques. Si les caractéristiques sont connues, il ne reste qu'à former avec elles la surface qui est le graphique d'une fonction, fonction qui sera solution de l'équation quasi linéaire. Les autres solutions se construisent de même.

EXERCICE. Montrer que le problème de Cauchy pour l'équation quasi linéaire du premier ordre admet une solution et une seule dans un voisinage assez petit d'un point x_0 de l'hypersurface initiale et pour une condition initiale, tels que le vecteur $a(x_0, u(x_0))$ ne soit pas tangent à l'hypersurface initiale.

REMARQUE. Contrairement à une équation linéaire, dans le cas d'une équation quasi linéaire on ne peut pas dire si un point de l'hypersurface initiale est caractéristique ou non : en effet, ceci dépend aussi de la condition initiale.

7. Equation non linéaire aux dérivées partielles du premier ordre. Les équations non linéaires de forme générale $F(x, \partial u/\partial x, u) = 0$ s'intègrent à l'aide des caractéristiques comme les équations linéaires et quasi linéaires. Mais si les caractéristiques de l'équation linéaire en une fonction dans $\mathbf{R}^n$ sont contenues dans $\mathbf{R}^n$ et celles de l'équation quasi linéaire, dans l'espace $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ à $n + 1$ dimensions, les caractéristiques de l'équation générale non linéaire sont des courbes de l'espace à $2n + 1$ dimensions de 1-jets de fonctions, sur lequel est définie la fonction F.

DÉFINITION. On appelle *espace des 1-jets des fonctions de* $x = (x_1, \dots$ $\dots, x_n)$ l'espace à $2n + 1$ dimensions muni des coordonnées $(x_1, \dots, x_n;$ $p_1, \dots, p_n; y)$.

Un 1-jet d'une fonction u en un point x est un point de cet espace de coordonnées $(x, p = \partial u/\partial x, y = u(x))$. L'ensemble des 1-jets d'une fonction u en tous les points x de son domaine de définition s'appelle *1-graphique* de cette fonction.

L'équation $F(x, \partial u/\partial x, u) = 0$ définit dans l'espace des 1-jets une hypersurface E sur laquelle $F(x, p, y) = 0$. Une solution de l'équation $F = 0$ est une fonction dont le 1-graphique appartient à l'hypersurface E.

On admettra que le vecteur F_p (de composantes $\partial F/\partial p_i$) est non nul : sans cette condition l'équation pourrait ne pas contenir $\partial u/\partial x$ et ne pas être différentielle. La condition $F_p \neq 0$ entraîne la différentiabilité de l'hypersurface E (en vertu du théorème des fonctions implicites). Le plus délicat dans la théorie de l'équation non linéaire aux dérivées partielles du premier ordre c'est d'imaginer la définition suivante.

DÉFINITION. On appelle *caractéristiques* de l'équation $F = 0$ les orbites du système d'équations différentielles sur l'hypersurface E de l'espace des 1-jets :

$$\dot{x} = F_p, \dot{p} = -F_x - pF_y, \dot{y} = pF_p.$$

EXERCICE 1. Montrer que toute orbite de ce système issue de l'hypersurface E est entièrement contenue dans E.

Solution. $\dot{F} = F_x\dot{x} + F_p\dot{p} + F_y\dot{y} = 0$.

EXERCICE 2. Montrer que *le 1-graphique de chaque solution de l'équation* $F = 0$ *contient avec chacun de ses points une portion de caractéristique passant par ce point. Réciproquement, si le 1-graphique d'une fonction est composé de caractéristiques entières, cette fonction est une solution.*

Solution. $dy = p\,dx$ et $dp = (\partial^2 u/\partial x^2)dx$ le long du 1-graphique d'une solution. Pour chaque vecteur caractéristique la première condition est visiblement remplie, quant à la seconde elle résulte de la nullité de la restriction de dF au 1-graphique : la restriction de $F_x dx + F_p dp + F_y dy$ au 1-graphique est de la forme

$$(F_x + pF_y)dx + F_p \partial^2 u/\partial x^2 \, dx.$$

On trouvera la démonstration de la réciproque (ainsi que l'explication géométrique de l'étrange définition des caractéristiques) dans les ouvrages de l'auteur : *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*, Moscou, éd. Mir, 1980, § 8 ou dans *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, Moscou, éd. Mir, 1976, pages 372-374 : elles sont fondées sur la géométrie d'un champ de plans de contact dans l'espace des jets.

Le résultat de l'exercice 2 ramène l'intégration d'une équation non linéaire du premier ordre (par exemple, la résolution du problème de Cauchy) à l'intégration d'un système d'équations différentielles ordinaires : les équations des caractéristiques. On construit une sous-variété de l'espace des 1-jets d'après la condition initiale, les caractéristiques passant par cette sous-variété forment le 1-graphique de la solution cherchée.

EXERCICE 3. Montrer que les projetées, par l'application $(x, p, y) \mapsto (x, y)$, des caractéris-

tiques d'une équation non linéaire qui est quasi linéaire sont les caractéristiques de cette équation quasi linéaire.

EXERCICE* 4. Montrer que les caractéristiques de l'équation non linéaire $F = 0$ sont intrinsèquement liées à l'équation : les difféomorphismes de l'espace des x ou même du produit de l'espace des x par l'axe des valeurs de la fonction F transforment les dérivées de telle sorte que les caractéristiques de l'équation initiale sont envoyées dans celles de l'équation image ; les caractéristiques sont invariantes par une multiplication de F par une fonction non nulle.

REMARQUE. En réalité, le lien entre l'hypersurface E et les caractéristiques situées sur E est invariant par un groupe plus large encore de difféomorphismes de l'espace des jets, groupe qui confond les arguments non seulement avec les valeurs mais aussi avec les dérivées : l'essentiel c'est que le difféomorphisme de l'espace des jets conserve le champ des plans de contact (définis par l'équation $dy = p\,dx$). Ces difféomorphismes sont dits *de contact* et forment un *groupe de contact* qui est capital pour la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre et pour l'optique géométrique.

DÉFINITION. On appelle *équation de Hamilton-Jacobi* une équation aux dérivées partielles du premier ordre qui ne contient pas explicitement la valeur de la fonction inconnue, i.e. une équation de la forme $H(x, \partial u/\partial x) = 0$.

EXERCICE 5. Démontrer que la distance d'un point du plan à une courbe différentiable sur ce plan (fig. 91) satisfait à l'équation de Hamilton-Jacobi $\sum (\partial u/\partial x_i)^2 = 1$ dans un voisinage de cette courbe (privé d'elle).

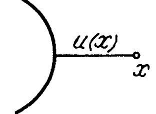


Fig. 91. Solution de l'équation de Hamilton-Jacobi

EXERCICE 6. Montrer que la distance d'un point d'un espace euclidien à une sous-variété différentiable (de dimension quelconque) de cet espace satisfait à l'équation de Hamilton-Jacobi $\sum (\partial u/\partial x_i)^2 = 1$ dans un voisinage de cette sous-variété (privé d'elle).

EXERCICE 7. Montrer que toute solution de l'équation de Hamilton-Jacobi $\sum (\partial u/\partial x_i)^2 = 1$ est, dans un voisinage assez petit de tout point d'un espace euclidien, la somme de la distance à une hypersurface différentiable et d'une constante.

EXERCICE 8. Montrer que les projetées des caractéristiques de l'équation de Hamilton-Jacobi $H = 0$ sur l'espace (x, p) sont les orbites des équations de Hamilton $\dot{x} = H_p$, $\dot{p} = -H_x$, situées sur la surface de niveau zéro de la fonction de Hamilton.

§ 12. Système conservatif à un degré de liberté

A titre d'exemple où l'intégrale première est appliquée à l'étude d'une équation différentielle, voyons un système mécanique à un degré de liberté sans frottement.

1. Définitions. On appelle *système conservatif à un degré de liberté* le système décrit par l'équation différentielle

$$\ddot{x} = F(x), \tag{1}$$

où F est une fonction différentiable sur un certain intervalle I de l'axe réel x.

L'équation (1) est équivalente au système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = F(x_1), \end{cases} \qquad (x_1, x_2) \in I \times \mathbf{R}. \tag{2}$$

La notation suivante est à l'usage en mécanique:

I — espace de configuration;
$x_1 = x$ — coordonnée ;
$x_2 = \dot{x}$ — vitesse ;
$\ddot{x}$ — accélération ;
$I \times \mathbf{R}$ — espace des phases ;
(1) — équation de Newton ;
F — champ de forces ;
$F(x)$ — force.

Considérons les fonctions suivantes dans l'espace des phases :

$$T = \frac{\dot{x}^2}{2} = \frac{x_2^2}{2}, \textit{ énergie cinétique ;}$$

$$U = -\int_{x_0}^{x} F(\xi)\mathrm{d}\xi, \textit{ énergie potentielle ;}$$

$$E = T + U, \textit{ énergie mécanique totale.}$$

$F(x)$ étant égale à $-\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}$, *l'énergie potentielle définit un système.*

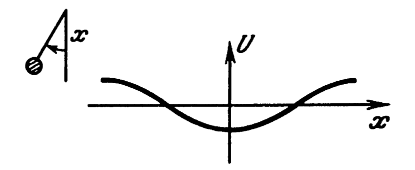


Fig. 92. Energie potentielle du pendule

EXEMPLE 1. Pour le pendule du § 1 (fig. 92)

$$\ddot{x} = -\sin x,$$

x étant l'angle d'écart, $F(x) = -\sin x$, $U(x) = -\cos x$. Pour l'équation des petites oscillations du pendule $\ddot{x} = -x$

$$F(x) = -x, \ U(x) = \frac{x^2}{2}.$$

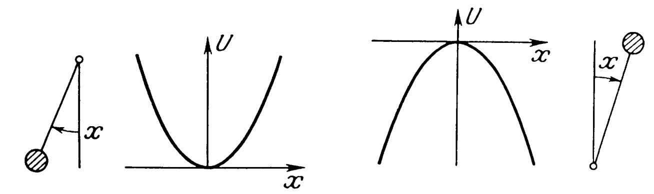


Fig. 93. Energie potentielle du pendule au voisinage des positions supérieure et inférieure d'équilibre

Pour l'équation des petites oscillations du pendule renversé $\ddot{x} = x$

$$F(x) = x, \; U(x) = -\frac{x^2}{2}$$

(fig. 93).

2. Principe de la conservation de l'énergie.

THÉORÈME. *L'énergie totale E est une intégrale première du système* (2).
Démonstration. Nous avons

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{x_2(t)^2}{2} + U(x_1(t))\right) = x_2\dot{x}_2 + U'\dot{x}_1 = x_2F(x_1) - F(x_1)x_2 = 0,$$

c.q.f.d.

Le théorème démontré nous permet d'étudier et de résoudre explicitement par « quadratures » une équation de la forme (1), celle du pendule par exemple.

3. Lignes de niveau d'énergie. Examinons les courbes de phase du système (2). Chacune d'elles est entièrement contenue dans un ensemble de niveau d'énergie. Voyons ces ensembles de niveau.

THÉORÈME. *L'ensemble de niveau d'énergie*

$$\left\{(x_1, x_2) : \frac{x_2^2}{2} + U(x_1) = E\right\}$$

est une courbe continûment différentiable au voisinage de chacun de ses points à l'exception de la position d'équilibre, i.e. du point (x_1, x_2) *où*

$$F(x_1) = 0, \quad x_2 = 0.$$

Démonstration. Nous allons nous servir du théorème des fonctions implicites. Nous avons

$$\frac{\partial E}{\partial x_1} = -F(x_1), \quad \frac{\partial E}{\partial x_2} = x_2.$$

Si l'une des deux dérivées est différente de 0, au voisinage du point considéré, l'ensemble de niveau E représente le graphique d'une fonction différentiable de la forme $x_1 = x_1(x_2)$ ou $x_2 = x_2(x_1)$. Le théorème est démontré.

Remarquons que les points (x_1, x_2) exclus plus haut et en lesquels $F(x_1) = 0$ et $x_2 = 0$ sont précisément les points stationnaires (positions d'équilibre) du système (2) et les points singuliers du champ de vitesses de phase. Par ailleurs ces mêmes points sont des points critiques *) de l'énergie totale $E(x_1, x_2)$. Enfin les points x_1, où $F(x_1) = 0$, sont les points critiques de l'énergie potentielle U.

Pour dessiner les lignes de niveau de l'énergie il est commode de s'imaginer une bille roulant dans une « vallée de potentiel » U (fig. 94).

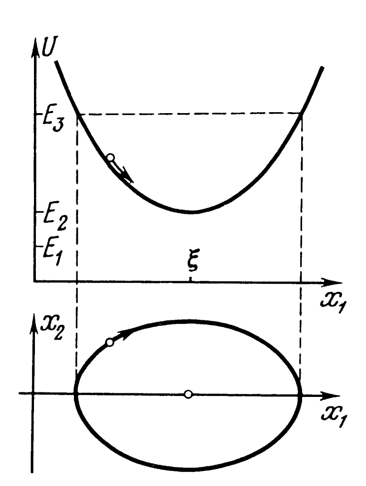


Fig. 94. Bille dans la vallée de potentiel et courbe de phase correspondante

Donnons-nous une valeur de l'énergie totale E.

Remarquons que l'énergie cinétique est positive. Pour cette raison l'énergie potentielle est inférieure à l'énergie totale. Ce qui signifie donc que la projetée de la ligne de niveau de l'énergie E sur l'espace de configuration (sur l'axe x_1) est l'ensemble des valeurs de l'énergie potentielle $\{x_1 \in I : U(x_1) \leqslant E\}$ inférieures à E (la bille ne peut s'élever au-dessus du niveau E dans la vallée de potentiel).

Plus l'énergie potentielle est petite et plus la vitesse est grande (en valeur absolue) : $|x_2| = \sqrt{2(E - U(x_1))}$ (en roulant dans la vallée la bille prend

---

*) On appelle *point critique* d'une fonction un point en lequel s'annule la différentielle totale de cette fonction. La valeur de cette fonction en ce point est appelée *valeur critique*.

une vitesse qu'elle perd en montant). La vitesse est nulle aux « points de retour » où $U(x_1) = E$.

L'énergie étant paire par rapport à x_2, on en déduit que la ligne de niveau de l'énergie est symétrique par rapport à l'axe x_1 (la bille passe par chaque point à la même vitesse, à l'aller et au retour).

Nous pouvons désormais représenter les lignes de niveau de systèmes dont les potentiels U sont différents. Considérons pour commencer le cas simple d'une vallée de potentiel de profondeur infinie possédant un unique centre attractif ξ, i.e. $F(x)$ décroît strictement, $F(\xi) = 0, I = \mathbf{R}$ (fig. 94).

Si la valeur E_1 de l'énergie totale est inférieure à la valeur minimale de l'énergie potentielle E_2, l'ensemble de niveau $E = E_1$ est vide (le mouvement de la bille est physiquement impossible). L'ensemble de niveau $E = E_2$ est composé d'un seul point $(\xi, 0)$ (la bille est au repos au fond de la vallée).

Si la valeur E_3 de l'énergie totale est supérieure à la valeur critique $E_2 = U(\xi)$, l'ensemble de niveau $E = E_3$ est constitué par une courbe fermée, différentiable et symétrique entourant la position d'équilibre $(\xi, 0)$ sur le plan des phases (la bille accomplit un mouvement de va-et-vient dans la vallée ; elle s'élève jusqu'à la hauteur E_3 où sa vitesse s'annule, puis elle redescend, passe par ξ où sa vitesse est alors maximale, remonte l'autre paroi et ainsi de suite).

La même marche est à suivre dans l'étude de cas plus complexes : i.e. il faudra augmenter progressivement les valeurs de l'énergie totale E et s'arrêter aux valeurs de E qui sont égales aux valeurs critiques de l'énergie potentielle $U(\xi)$ (où $U'(\xi) = 0$), en faisant attention à chaque fois aux

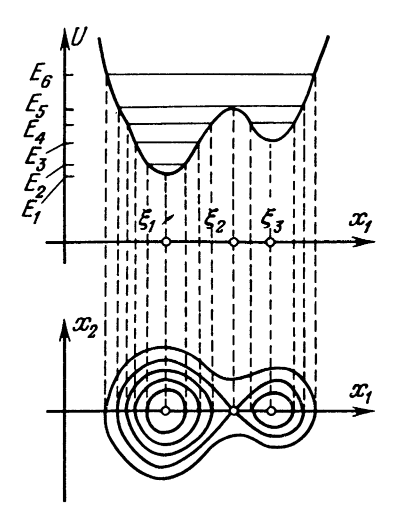


Fig. 95. Lignes de niveau d'énergie

lignes dont les valeurs de E sont légèrement inférieures ou légèrement supérieures aux valeurs critiques.

EXEMPLE. Supposons que l'énergie potentielle U possède trois points critiques : ξ_1 (minimum), ξ_2 (maximum local), ξ_3 (minimum local). Sur la fig. 95 sont représentées les lignes de niveau $E_1 = U(\xi_1)$, $U(\xi_1) < E_2 < U(\xi_3)$, $E_3 = U(\xi_3)$, $U(\xi_3) < E_4 < U(\xi_2)$, $E_5 = U(\xi_2)$, $E_6 > U(\xi_2)$.

EXERCICE 1. Représenter les lignes de niveau d'énergie pour l'équation du pendule $\ddot{x} = -\sin x$ et pour l'équation du pendule à proximité des positions inférieure et supérieure d'équilibre ($\ddot{x} = -x$ et $\ddot{x} = x$).

EXERCICE 2. Représenter les lignes de niveau d'énergie pour le *problème de Kepler* *) $U = -\frac{1}{x} + \frac{C}{x^2}$ et pour les potentiels de la fig. 96.

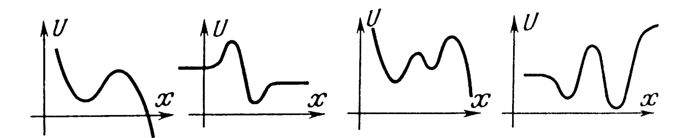


Fig. 96. Tracer les lignes de niveau d'énergie pour les potentiels ci-contre

4. Lignes de niveau d'énergie au voisinage d'un point singulier. Pour savoir comment se comportent les lignes de niveau d'énergie au voisinage d'un point singulier il est conseillé de tenir compte des remarques suivantes :

REMARQUE 1. *Si l'énergie potentielle est une forme quadratique* $U = kx^2/2$, *les lignes de niveau d'énergie sont des coniques* $2E = x_2^2 + kx_1^2$.

S'il y a attraction, $k > 0$, i.e. le point critique 0 est un minimum pour l'énergie potentielle U (fig. 97). Dans ce cas les lignes de niveau d'énergie sont des ellipses homothétiques centrées en 0.

S'il y a répulsion, $k < 0$, i.e. le point critique 0 est un maximum pour l'énergie potentielle (fig. 97). Dans ce cas les lignes de niveau d'énergie sont des hyperboles homothétiques centrées en 0, admettant pour asymptotes les droites $x_2 = \pm\sqrt{k}x_1$. Ces asymptotes sont appelées aussi *séparatrices*, car elles séparent l'une de l'autre les diverses hyperboles.

---

*) La variation des distances séparant les planètes et les comètes du Soleil est décrite par l'équation de Newton avec ce potentiel.

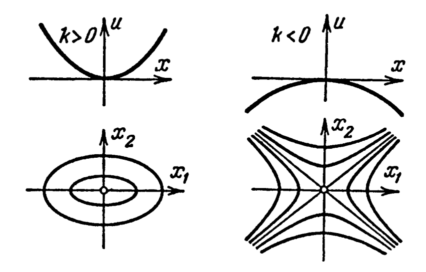


Fig. 97. Lignes de niveau d'énergie pour des potentiels quadratiques attractif et répulsif

REMARQUE 2. *Au voisinage d'un point critique non dégénéré, l'accroissement d'une fonction est une forme quadratique, à condition de choisir convenablement le système de coordonnées.*

Le point 0 est un point critique pour la fonction différentiable f si $f'(0) = 0$. Le point 0 est un point critique *non dégénéré* si $f''(0) \neq 0$. Supposons que $f(0) = 0$.

LEMME DE MORSE *). *Au voisinage d'un point critique non dégénéré* 0, *on peut choisir la coordonnée y telle que*

$$f = Cy^2, \qquad C = \operatorname{sgn} f''(0).$$

Il est évident que $y = \operatorname{sgn} x\sqrt{|f(x)|}$. Le lemme affirme qu'au voisinage du point 0 la correspondance $x \mapsto y$ est un difféomorphisme.

Pour la commodité de la démonstration formulons le lemme suivant :

LEMME D'HADAMARD *). *Si une fonction différentiable f (de classe C^r) s'annule avec sa dérivée au point $x = 0$, elle est alors égale au produit $xg(x)$, où $g(x)$ est une fonction différentiable (de classe C^{r-1} au voisinage du point $x = 0$).*

Démonstration. Nous avons

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}f(tx)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f'(tx)x\,\mathrm{d}t = x\int_0^1 f'(tx)\mathrm{d}t\,;$$

*) On peut étendre ces deux lemmes aux fonctions de plusieurs variables.

la fonction $g(x) = \int_0^1 f'(tx)\mathrm{d}t$ est de classe C^{r-1}, et le lemme est démontré.

Appliquons à deux reprises le lemme d'Hadamard à la fonction f du lemme de Morse. On a $f = x^2\varphi(x)$, ou $2\varphi(0) = f''(0) \neq 0$. D'où $y = x\sqrt{|\varphi(x)|}$. Le lemme de Morse est démontré puisque au voisinage du point $x = 0$ la fonction $\sqrt{|\varphi(x)|}$ est différentiable ($r - 2$ fois si f est de classe C^r).

Par conséquent, au voisinage d'un point critique non dégénéré, les lignes de niveau d'énergie se transforment soit en ellipses, soit en hyperboles par un changement difféomorphe du système de coordonnées (x_1, x_2).

EXERCICE. Chercher les tangentes aux séparatrices d'un point singulier répulsif ($U''(\xi) < 0$).

Réponse. $x_2 = \pm\sqrt{|U''(\xi)|}\,(x_1 - \xi)$ (fig. 98).

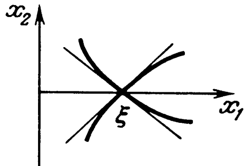


Fig. 98. Tangentes aux séparatrices d'un point singulier répulsif

5. Prolongement des solutions de l'équation de Newton. Supposons que l'énergie potentielle soit définie sur l'axe x tout entier. Du principe de la conservation de l'énergie il vient immédiatement :

THÉORÈME. *Si l'énergie potentielle U est partout positive* *), *toute solution de l'équation*

$$\ddot{x} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} \qquad (1_1)$$

est indéfiniment prolongeable.

*) Il est évident que l'équation (1_1) ne change pas si l'énergie potentielle U varie d'une constante. L'essentiel c'est que U soit minorée.

EXEMPLE. Supposons $U = -x^4/2$. La solution $x = 1/(t-1)$ ne peut être prolongée à $t = 1$.

Procédons tout d'abord à une *estimation a priori.*

LEMME. *S'il existe une solution pour* $|t| < \tau$, *elle vérifie les inégalités*

$$|\dot{x}(t)| \leqslant \sqrt{2E_0}, \qquad |x(t) - x(0)| < \sqrt{2E_0}\,|t|,$$

où $E_0 = \dfrac{\dot{x}(0)^2}{2} + U(x(0))$ *est la valeur initiale de l'énergie.*

Démonstration. D'après le principe de la conservation de l'énergie on a

$$\frac{\dot{x}^2(t)}{2} + U(x(t)) = E_0,$$

et puisque $U > 0$, la première inégalité est démontrée. La deuxième inégalité découle de la première puisque $x(t) - x(0) = \int_0^t \dot{x}(\theta)\,d\theta$. Le lemme est démontré.

Démonstration du théorème. Soit $T > 0$ un nombre quelconque. Considérons le rectangle Π (fig. 99) dans l'espace des phases

$$|x_1 - x_1(0)| \leqslant 2\sqrt{2E_0}\,T, \qquad |x_2| \leqslant 2\sqrt{2E_0}.$$

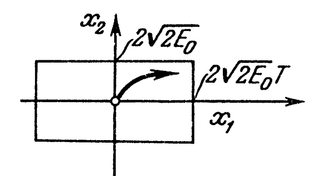


Fig. 99. Rectangle dans lequel séjournera le point représentatif durant le temps T

Considérons dans l'espace des phases élargi (x_1, x_2, t) le parallélépipède $|t| \leqslant T$, $(x_1, x_2) \in \Pi$. D'après le théorème de prolongement la solution est prolongeable à la frontière du parallélépipède. Du lemme il découle que cette solution peut sortir du parallélépipède seulement par les faces où $|t| = T$. Par conséquent, cette solution est prolongeable à un point quelconque $t = \pm T$, donc indéfiniment.

EXERCICE. Montrer que si l'énergie potentielle $U > 0$, les solutions du système d'équations de Newton

$$m_i \ddot{x}_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad i = 1, \ldots, N, \quad m_i > 0, \quad x \in \mathbf{R}^N,$$

sont indéfiniment prolongeables.

6. Lignes de niveau d'énergie non critiques. Supposons que l'énergie potentielle U soit définie sur l'axe x tout entier. Soit E une valeur non critique de l'énergie, i.e. E n'est égale à la fonction U en aucun de ses points critiques.

Considérons l'ensemble des points tels que $U < E$:

$$\{x : U(x) < E\}.$$

Cet ensemble (fig. 100) est composé d'un nombre fini ou dénombrable d'intervalles puisque la fonction U est continue (les bornes de deux de ces intervalles peuvent tendre vers l'infini). Aux bornes des intervalles $U(x) = E$, par conséquent $U'(x) \neq 0$ (puisque E n'est pas une valeur critique). Pour cette raison, chaque point de l'ensemble $\{x : U(x) \leqslant E\}$ est l'extrémité d'un seul intervalle de valeurs inférieures. Par conséquent l'ensemble $\{x : U(x) \leqslant E\}$ soit est égal à l'union d'un nombre au plus dénombrable d'intervalles fermés disjoints deux à deux et éventuellement d'une ou de deux demi-droites s'éloignant à l'infini, soit se confond avec l'axe x tout entier.

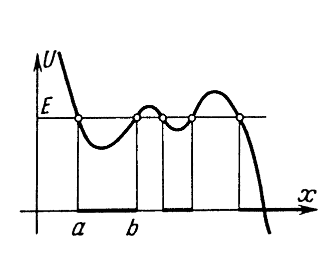


Fig. 100. Ensemble des points x tels que $U(x) < E$

Fig. 101. Courbe de phase difféomorphe au cercle

Considérons (fig. 101) l'un de ces intervalles, $a \leqslant x \leqslant b$,

$$U(a) = U(b) = E, \quad U(x) < E \quad \text{lorsque} \quad a < x < b.$$

THÉORÈME. *L'équation*

$$\frac{x_2^2}{2} + U(x_1) = E, \quad a \leqslant x_1 \leqslant b,$$

définit sur le plan (x_1, x_2) *une courbe différentiable, difféomorphe à un cercle. Cette courbe est une courbe de phase du système* (2).

De la même manière, la demi-droite $a \leqslant x < \infty$ *(ou bien* $-\infty < x \leqslant$

$\leqslant b$), *où* $U(x) \leqslant E$, *est la projetée sur l'axe* x_1 (fig. 102) *d'une courbe de phase difféomorphe à une droite. Enfin si* $U(x) < E$ *sur toute la droite, l'ensemble de niveau E est constitué de deux courbes de phase*

$$x_2 = \pm\sqrt{2(E - U(x_1))}.$$

Par conséquent, l'ensemble de niveau d'énergie non critique est composé d'un nombre fini ou dénombrable de courbes de phase différentiables.

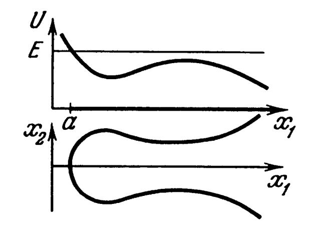


Fig. 102. Courbe de phase difféomorphe à la droite

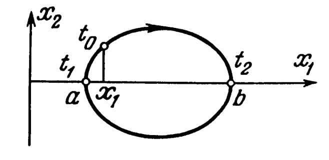


Fig. 103. La moitié de la courbe de phase (de a à b) est parcourue par le point représentatif en un temps fini $T/2 = t_2 - t_1$

7. Démonstration du théorème précédent. Le principe de conservation de l'énergie permet de résoudre explicitement l'équation de Newton. En effet, si l'on fixe une valeur de l'énergie totale E, la valeur (mais non le signe) de la vitesse $\dot{x}$ est définie par la position du point x :

$$x = \pm\sqrt{2(E - U(x))}. \tag{3}$$

Nous obtenons ainsi une équation dont l'espace des phases est à *une dimension*, équation que nous savons déjà résoudre.

Soit (x_1, x_2) un point quelconque de notre ensemble de niveau tel que $x_2 > 0$ (fig. 103). De la relation (3) tirons la solution φ de l'équation (1) qui satisfait à la condition initiale $\varphi(t_0) = x_1$, $\dot{\varphi}(t_0) = x_2$:

$$t - t_0 = \int_{x_1}^{\varphi(t)} \frac{d\xi}{\sqrt{2(E - U(\xi))}} \tag{4}$$

pour les valeurs de t proches de t_0.

Remarquons que l'intégrale

$$\frac{T}{2} = \int_a^b \frac{d\xi}{\sqrt{2(E - U(\xi))}}$$

est convergente, puisque $U'(a) \neq 0$ et $U'(b) \neq 0$. Il s'ensuit que la formule (4) définit une fonction φ continue sur un certain intervalle $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ et telle que $\varphi(t_1) = a$ et $\varphi(t_2) = b$. Cette fonction vérifie partout l'équation de Newton (fig. 104).

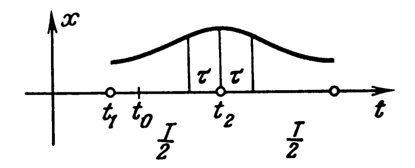


Fig. 104. Prolongement d'une solution de l'équation de Newton par des symétries-droites

L'intervalle $[t_1, t_2]$ est d'une longueur égale à $T/2$. Prolongeons φ sur l'intervalle suivant de longueur $T/2$ par symétrie : $\varphi(t_2 + \tau) = \varphi(t_2 - \tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant T/2$, puis périodiquement : $\varphi(t + T) \equiv \varphi(t)$. La fonction φ construite sur toute la droite vérifie partout l'équation de Newton. De plus, $\varphi(t_0) = x_1$, $\dot{\varphi}(t_0) = x_2$.

Ainsi nous avons construit la solution du système (2) qui satisfait à la condition initiale (x_1, x_2). Cette solution s'est avérée périodique de période T. La courbe de phase fermée qui lui correspond est précisément cette partie de l'ensemble de niveau E définie sur l'intervalle $a \leqslant x \leqslant b$. Cette courbe est difféomorphe à un cercle comme toute courbe de phase fermée (voir § 9).

Le lecteur est invité à étudier le cas, plus facile, où les bornes de l'intervalle tendent séparément ou ensemble vers l'infini.

8. Lignes de niveau critiques. Les lignes de niveau critiques peuvent être d'une structure plus complexe. Remarquons qu'une telle ligne renferme des points fixes (x_1, x_2) (où $U'(x_1) = 0$, $x_2 = 0$) qui sont déjà des courbes de

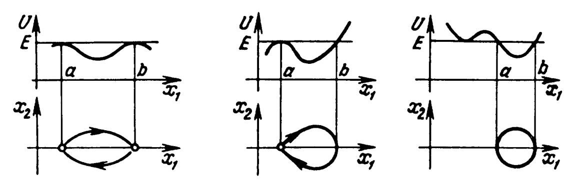


Fig. 105. Décomposition d'une ligne critique de niveau d'énergie en courbes de phase

phase. Si $U(x) < E$ pour $a < x < b$, et $U(a) = U(b) = E$, et si les bornes a et b sont des points critiques (i.e. $U'(a) = U'(b) = 0$), les deux arcs ouverts (fig. 105)

$$x_2 = \pm\sqrt{2(E - U(x_1))}, \quad a < x_1 < b,$$

sont des courbes de phase. Le temps que mettra le point représentatif à parcourir un de ces arcs est infini (théorème de prolongement, § 12, pt. 5, plus unicité).

Si $U'(a) = 0$, $U'(b) \neq 0$ (fig. 105), l'équation

$$\frac{x_2^2}{2} + U(x_1) = E, \quad a < x_1 \leqslant b,$$

définit une courbe de phase non fermée. Enfin si $U'(a) \neq 0$ et $U'(b) \neq 0$ (fig. 105), la partie de l'ensemble de niveau critique définie sur le segment $a \leqslant x_1 \leqslant b$ est une courbe de phase fermée comme pour le cas du niveau non critique E.

9. Exemple. Appliquons ce qui vient d'être dit à l'équation du pendule

$$\ddot{x} = -\sin x.$$

L'énergie potentielle $U(x)$ est égale à $-\cos x$ (fig. 106). Les points critiques sont : $x_1 = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \ldots$

Au voisinage des points $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$ les courbes de phase fermées ressemblent à des ellipses. A ces courbes correspondent des oscillations de faible amplitude du pendule. Leur période T dépend peu de l'amplitude tant que cette dernière est faible. Pour des valeurs plus élevées des constantes de l'énergie, on obtient de plus grandes courbes de phase fermées tant que l'énergie n'atteint pas une valeur critique égale à l'énergie potentielle du pendule renversé. La période des oscillations s'accroît (car il faut un temps infini pour parcourir les séparatrices qui constituent l'ensemble critique de niveau).

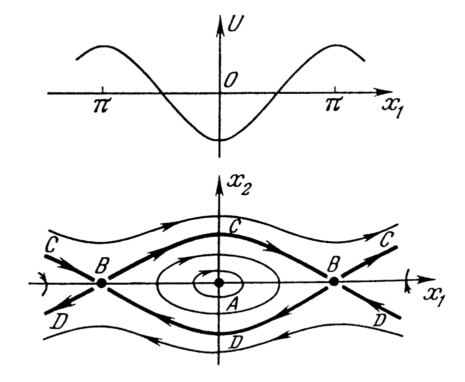


Fig. 106. Courbes de phase de l'équation du pendule

Aux valeurs plus élevées de l'énergie correspondent des courbes de phase non fermées sur lesquelles x_2 garde son signe, i.e. le pendule est animé d'un mouvement de rotation et non pas de balancement. Sa vitesse est maximale en position basse et minimale en position haute.

Remarquons que les valeurs de x_1 qui diffèrent de $2k\pi$ correspondent aux mêmes positions du pendule. Pour cette raison il est plus naturel de prendre pour espace des phases du pendule non pas un plan mais le cylindre $\{x_1 \bmod 2\pi, x_2\}$ (fig. 107).

Lorsqu'on enroule sur la surface de ce cylindre les dessins représentés sur le plan, on obtient les courbes de phase du pendule, qui sont toutes des courbes différentiables fermées à l'exception de deux points stationnaires A et B (qui correspondent aux positions inférieure et supérieure d'équilibre) et de deux séparatrices C et D.

Exercice 1. Représenter les graphiques des fonctions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ pour les solutions possédant une énergie proche (mais toutefois légèrement inférieure) de l'énergie critique de la position haute.

Réponse. Voir fig. 108. Les fonctions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ s'expriment au moyen du sinus elliptique sn et du cosinus elliptique cn. Lorsque E tend vers sa valeur critique inférieure, les oscillations du pendule se rapprochent des oscillations harmoniques et les sn et cn se transforment en sin et cos.

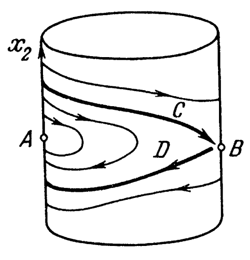


Fig. 107. Espace des phases cylindrique du pendule

Fig. 108. Angle d'écart du pendule et sa vitesse de variation pour une amplitude proche de π

Exercice 2. A quelle vitesse la période T des oscillations du pendule tend-elle vers l'infini lorsque l'énergie E tend vers sa valeur critique supérieure E_1 ?

Réponse. A une vitesse logarithmique ($\sim C \ln (E_1 - E)$).

N o t a. Voir formule (4).

Exercice 3. Représenter les courbes de phase des systèmes dont l'énergie potentielle est $U(x) = \pm x \sin x, \pm \dfrac{\sin x}{x}, \pm \sin x^2$.

Exercice 4. Représenter les courbes de phase de l'équation de Newton avec le champ de forces $F(x) = \pm x \sin x, \pm \dfrac{\sin x}{x}, \pm \sin x^2$.

10. Petites perturbations d'un système conservatif. Une fois qu'on a étudié les mouvements d'un système conservatif on peut utiliser ces résultats pour des systèmes proches de forme générale en vertu du théorème de différentiabilité par rapport au paramètre (comparer avec le § 7, 5). Ceci nous amènera à considérer des phénomènes d'une grande importance dans les applications : *les autooscillations*.

Exercice 1. Etudier les courbes de phase d'un système proche de celui des équations des petites oscillations du pendule :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \varepsilon f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = -x_1 + \varepsilon f_2(x_1, x_2), \end{cases} \qquad \varepsilon \ll 1, \quad x_1^2 + x_2^2 \leqslant R^2.$$

Solution. En faisant $\varepsilon = 0$ nous obtenons les équations des petites oscillations du pendule. D'après le théorème de différentiabilité par rapport au paramètre pour de petites valeurs de ε, la solution (dans un intervalle de temps fini) diffère des oscillations harmoniques

$$x_1 = A \cos (t - t_0),$$
$$x_2 = -A \sin (t - t_0)$$

d'un terme additif de l'ordre de ε. Par conséquent, lorsque $\varepsilon < \varepsilon_0(T)$ est suffisamment petit, le point représentatif reste au voisinage d'un cercle de rayon A durant un intervalle de temps T.

Contrairement au système conservatif (où $\varepsilon = 0$), lorsque $\varepsilon \neq 0$, la courbe de phase n'est pas obligatoirement une courbe fermée : elle peut avoir la forme d'une spirale (fig. 109) dont la distance séparant deux spires voisines est petite (de l'ordre de ε). Pour déterminer si cette courbe se rapproche ou s'éloigne de l'origine des coordonnées voyons de combien s'accroît l'énergie $E = \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2}$ en une rotation autour de l'origine des coordonnées. Ce qui nous intéressera le plus, ce sera le signe de cet accroissement : cet accroissement est >0 pour une spirale qui se déroule, <0 pour une spirale qui s'enroule et enfin est nul pour un cycle. Etablissons la formule approchée (5) pour l'accroissement de l'énergie.

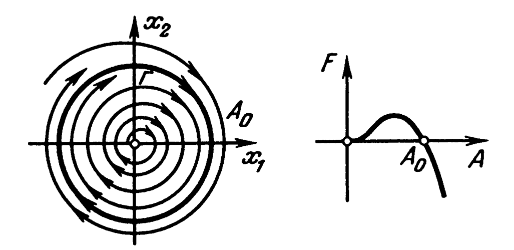


Fig. 109. Courbes de phase de l'équation de Van der Pol et accroissement de l'énergie en une rotation

Il est facile de calculer la dérivée de l'énergie suivant la direction de notre champ de vecteurs : elle est proportionnelle à ε et est égale à

$$\dot{E}(x_1, x_2) = \varepsilon(x_1 f_1 + x_2 f_2).$$

Pour déterminer l'accroissement de l'énergie en une rotation on aurait dû intégrer cette fonction le long d'une spire de courbe de phase qui malheureusement nous est inconnue. Mais nous savons que cette spire est proche d'un cercle. Par conséquent nous pouvons intégrer le long d'un cercle S de rayon A avec une précision d'ordre $O(\varepsilon^2)$:

$$\Delta E = \varepsilon \int_0^{2\pi} \dot{E}(A \cos t, - A \sin t) dt + O(\varepsilon^2).$$

En portant la valeur de $\dot{E}$ dans cette expression, on a *)

$$\Delta E = \varepsilon F(A) + O(\varepsilon^2), \tag{5}$$

*) Nous nous sommes servis du fait que le long de S $dx_1 = x_2\, dt$ et $dx_2 = -x_1 dt$.

où

$$F(A) = \oint f_1 \, dx_2 - f_2 \, dx_1$$

(on intègre le long du cercle de rayon A dans le sens direct).

Maintenant que nous avons calculé la fonction F, nous pouvons étudier le comportement des courbes de phase. Si $F > 0$, il en est de même de l'accroissement ΔE de l'énergie au cours d'une rotation (pour $\varepsilon > 0$ petit). Dans ce cas la courbe de phase est une spirale qui se déroule ; quant au système, il accomplit des oscillations dont l'amplitude va en croissant.

Si $F < 0$, alors $\Delta E < 0$ et la spirale s'enroule. Dans ce cas les oscillations s'amortissent.

Il peut aussi arriver que la fonction F change de signe (fig. 109). Supposons que A_0 soit une racine simple de la fonction F. Pour ε petit, l'équation

$$\Delta E(x_1, x_2) = 0$$

est alors vérifiée par une courbe fermée Γ sur le plan de phase, proche d'un cercle de rayon A_0 (d'après le théorème des fonctions implicites).

Il est évident que la courbe Γ qui est une courbe de phase fermée est un cycle limite de notre système.

Selon le signe de la dérivée $F' = dF/dA|_{A=A_0}$, on saura si les courbes de phase voisines s'enrouleront sur le cycle ou au contraire s'en dérouleront. Si $\varepsilon F' > 0$, le cycle est *instable*, si $\varepsilon F' < 0$, il est *stable*. En effet, dans le premier cas l'accroissement de l'énergie en une rotation est >0 si la courbe de phase est située à l'extérieur du cycle et <0 si elle se trouve à son intérieur ; par conséquent la courbe de phase s'éloignera toujours de ce cycle. Dans le deuxième cas les courbes de phase se rapprocheront du cycle de l'intérieur et de l'extérieur de la même manière que sur la fig. 109.

EXEMPLE. Considérons l'équation $\ddot{x} = -x + \varepsilon\dot{x}(1 - x^2)$ qu'on appelle *équation de Van der Pol*. Calculons l'intégrale (5) lorsque $f_1 = 0$ et $f_2 = x_2(1 - x_1^2)$. On a

$$F(A) = \pi\left(A^2 - \frac{A^4}{4}\right).$$

Cette fonction possède une racine simple $A_0 = 2$ (fig. 109) ; elle est >0 pour $A < A_0$ et <0 pour $A > A_0$. Pour cette raison l'équation de Van der Pol possède, pour ε petit, un cycle limite stable proche du cercle $x^2 + \dot{x}^2 = 4$ sur le plan de phase.

Comparons les mouvements du système conservatif initial lorsque $\varepsilon = 0$ et lorsque $\varepsilon \neq 0$. Dans un système conservatif peuvent apparaître des oscillations d'une amplitude quelconque (toutes les courbes de phase sont fermées). L'amplitude quant à elle est déterminée par les conditions initiales.

Dans un système non conservatif on peut se trouver en présence de phénomènes tout à fait différents, par exemple d'un cycle limite stable. Dans ce cas il s'établit une oscillation périodique possédant une amplitude bien déterminée qui ne varie pas quelles que soient les conditions initiales. Ce régime établi est appelé *régime d'autooscillations*.

EXERCICE* 2. Etudier les régimes autooscillatoires du mouvement d'un pendule de faible frottement, soumis à l'action d'un moment de rotation constant M :

$$\ddot{x} + \sin x + \varepsilon\dot{x} = M.$$

Nota. Cet exercice fait l'objet d'une étude détaillée quels que soient ε et M dans l'ouvrage : A. Andronov, A. Vitt et S. Haïkine, *Théorie des oscillations* ; Phyzmatguiz, 1959, chap. 7.

CHAPITRE 3

SYSTÈMES LINÉAIRES

Les équations linéaires constituent pratiquement l'unique importante classe d'équations différentielles dont la théorie soit relativement complète. Cette théorie qui, en fait, est une branche de l'algèbre linéaire permet de résoudre totalement les équations linéaires autonomes.

La théorie des équations linéaires est par ailleurs utile comme première approximation dans la résolution de problèmes non linéaires. Elle permet entre autres d'étudier la stabilité de l'équilibre ainsi que le type topologique des points singuliers des champs de vecteurs dans les cas génériques.

§ 13. Problèmes linéaires

Considérons pour commencer deux exemples faisant intervenir des équations linéaires.

1. Exemple : linéarisation. Soit une équation différentielle définie par un champ de vecteurs v sur un espace des phases. Nous savons déjà qu'au voisinage d'un point non singulier ($v \neq 0$) le champ v possède une structure simple, i.e. on peut le redresser par un difféomorphisme. Considérons à présent la structure de ce champ dans le voisinage d'un point singulier, i.e. d'un point où $v = 0$. Ce point x_0 sera une solution stationnaire de notre équation. Si celle-ci décrit un processus physique quelconque, x_0 en sera un état stationnaire, i.e. une « position d'équilibre ». C'est pourquoi l'étude du voisinage d'un point singulier permet d'établir comment évoluera ce processus lorsque les conditions initiales s'écartent légèrement des conditions d'équilibre (exemple : les positions inférieure et supérieure d'équilibre du pendule).

Lorsqu'on étudie un champ de vecteurs au voisinage d'un point singulier x_0, il est naturel de développer ce champ en série de Taylor. Le premier terme de la série de Taylor est linéaire. On opère une *linéarisation* lorsque l'on rejette les autres termes. Un champ de vecteurs linéarisé peut être considéré comme un exemple de champ de vecteurs possédant un point singulier x_0. D'un autre côté, il reste à espérer que les solutions de l'équation initiale et celles de l'équation linéarisée auront un comportement assez semblable (puisque la linéarisation n'exclut que les petits termes d'ordre supérieur). Une étude spéciale est nécessaire pour mettre en évidence le lien existant entre les solutions de l'équation initiale et celles de l'équation linéarisée, étude qui repose sur une analyse détaillée de l'équation linéaire. C'est par cette analyse que nous allons commencer.

EXERCICE 1. Montrer que *la linéarisation est une opération intrinsèque, i.e. elle ne dépend pas du système de coordonnées.*

Plus exactement, supposons que sur un domaine U un champ de vecteurs v est défini par ses composantes $v_i(x)$ dans un système de coordonnées x_i. Supposons qu'un point singulier a pour coordonnées $x_i = 0$, de sorte que $v_i(0) = 0$, $i = 1, \dots, n$. L'équation initiale s'écrit alors sous forme du système

$$x_i = v_i(x), \quad i = 1, \dots, n.$$

DÉFINITION. On appelle *équation linéarisée* une équation de la forme

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$a_{ij} = \left.\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right|_{x=0}.$$

Considérons un vecteur tangent $\xi \in T_0 U$ de composantes ξ_i $(i = 1, \dots, n)$. L'équation linéarisée peut s'écrire

$$\xi = A\xi,$$

où A est une application linéaire $A : T_0 U \to T_0 U$ définie par la matrice a_{ij}.

On affirme que *l'application A est indépendante du système de coordonnées x_i dans lequel elle a été définie.*

EXERCICE 2. Linéariser l'équation du pendule $\ddot{x} = -\sin x$ au voisinage des positions d'équilibre $x_0 = k\pi$, $x_0 = 0$.

2. Exemple : groupes à un paramètre de transformations linéaires de $\mathbf{R}^n$. Un autre problème conduisant immédiatement aux équations différentielles linéaires est celui qui consiste à chercher les groupes à un paramètre de transformations linéaires *) d'un espace vectoriel $\mathbf{R}^n$.

Remarquons qu'*un espace tangent en un point quelconque à un espace vectoriel $\mathbf{R}^n$ s'identifie naturellement à cet espace.* Plus exactement, nous identifions un élément φ de l'espace tangent $T_x\mathbf{R}^n$ auquel appartient la courbe $\varphi : I \to \mathbf{R}^n$, $\varphi(0) = x$, au vecteur

$$v = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(t) - x}{t} \in \mathbf{R}^n$$

de l'espace $\mathbf{R}^n$ (la correspondance $v \leftrightarrow \varphi$ est biunivoque).

Cette identification dépend de la structure de l'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$ et *ne* se conserve *pas* dans les difféomorphismes. Cependant dans les problèmes linéaires que nous allons aborder (par exemple, le problème des groupes à un paramètre de transformations linéaires), la structure de l'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$ sera fixée une bonne fois pour toutes. C'est pourquoi *nous allons*

*) Rappelons que la définition du groupe à un paramètre $\{g^t\}$ implique la différentiabilité de $g^t x$ par rapport à x et à t.

identifier $T_x\mathbf{R}^n$ à $\mathbf{R}^n$ *tant que nous ne reviendrons pas aux problèmes non linéaires.*

Soit $\{g^t,\ t \in \mathbf{R}\}$ un groupe à un paramètre de transformations linéaires. Considérons le mouvement $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ d'un point $x_0 \in \mathbf{R}^n$.

EXERCICE 1. Montrer que l'équation

$$\dot{x} = Ax \qquad (1)$$

admet une solution $\varphi(t)$ vérifiant la condition initiale $\varphi(0) = x_0$, où $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ est un opérateur linéaire ($\equiv \mathbf{R}$-endomorphisme) défini par la relation

$$Ax = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (g^t x) \qquad \forall\, x \in \mathbf{R}^n .$$

Nota. Voir § 4, pt. 4.

L'équation (1) est une équation *linéaire*. Il suffit donc d'étudier les solutions d'équations linéaires de la forme (1) pour décrire tous les groupes à un paramètre de transformations linéaires.

Nous verrons plus loin que la correspondance entre les groupes à un paramètre de transformations linéaires $\{g^t\}$ et les équations linéaires (1) est biunivoque : i.e. chaque opérateur $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ définit un groupe à un paramètre $\{g^t\}$.

EXEMPLE. Soit $n = 1$ et soit A la multiplication par un nombre k. g^t est alors une homothétie de rapport e^{kt}.

EXERCICE 2. Déterminer le champ de vitesses des points d'un solide tournant avec une vitesse angulaire ω autour de son axe qui passe par le point 0.

Réponse. $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{x}]$.

3. Equation linéaire. Soit $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ un opérateur linéaire donné dans l'espace réel $\mathbf{R}^n$.

DÉFINITION. On appelle *équation linéaire* une équation définie sur l'espace des phases $\mathbf{R}^n$ par le champ de vecteurs $\boldsymbol{v}(x) = Ax$:

$$\dot{x} = Ax. \qquad (1)$$

L'équation (1) est aussi appelée *système de n équations différentielles ordinaires, linéaires et homogènes du premier ordre à coefficients constants.*

Si, dans $\mathbf{R}^n$, l'on se donne un système de coordonnées (linéaires) x_i, $i = 1, \dots, n$, l'équation (1) s'écrit sous forme d'un système de n équations :

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j , \qquad i = 1, \dots , n,$$

où (a_{ij}) est la matrice associée à l'opérateur A dans le système de coordonnées envisagé. Cette matrice est appelée *matrice du système.*

La solution de l'équation (1) vérifiant la condition initiale $\varphi(0) = x_0$ est donnée, lorsque $n = 1$, par l'exponentielle

$$\varphi(t) = e^{At} x_0 .$$

Il s'avère que dans le cas général la solution est donnée par la même formule : il faut simplement définir l'exponentielle d'un opérateur linéaire. Ce que nous allons faire immédiatement.

§ 14. La fonction exponentielle

La fonction e^A, $A \in \mathbf{R}$, peut être définie indifféremment de l'une des deux manières équivalentes :

$$e^A = E + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots , \tag{1}$$

$$e^A = \lim_{n \to \infty} \left(E + \frac{A}{n} \right)^n \tag{2}$$

(où E représente l'unité).

Soit à présent $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ un opérateur linéaire. Avant de définir e^A, définissons la notion de limite d'une suite d'opérateurs linéaires.

1. Norme d'un opérateur. Munissons $\mathbf{R}^n$ du produit scalaire et désignons par $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ ($x \in \mathbf{R}^n$) la racine du carré scalaire de x.

Soit $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ un opérateur linéaire.

DÉFINITION. On appelle *norme* de A le nombre

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} .$$

Au point de vue géométrique, $\|A\|$ représente le plus grand « coefficient de dilatation » de la transformation A.

EXERCICE 1. Montrer que $0 \leqslant \|A\| < \infty$.

Nota. $\|A\| = \sup\limits_{\|x\| = 1} \|Ax\|$ est une sphère compacte, quant à la fonction $\|Ax\|$ elle est continue.

EXERCICE 2. Montrer que

$$\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|, \ \|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|,$$

$$\|AB\| \leqslant \|A\| \|B\|,$$

où A et $B : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ sont des opérateurs linéaires et $\lambda \in \mathbf{R}$ un nombre.

EXERCICE 3. Etant donné une matrice (a_{ij}) associée à un opérateur A dans une base orthonormée, montrer que

$$\max_j \sum_i a_{ij}^2 \leqslant \|A\|^2 \leqslant \sum_{i,j} a_{ij}^2.$$

Nota. Voir G. Chilov. *Introduction à la théorie des espaces linéaires.* Moscou, 1956, § 53.

2. Espace métrique d'opérateurs. L'ensemble L de tous les opérateurs linéaires $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ est muni d'une structure d'espace vectoriel sur le corps des réels (par définition $(A + \lambda B)\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} + \lambda B\boldsymbol{x}$).

EXERCICE. Trouver la dimension de l'espace vectoriel L.
Réponse. n^2.
Nota. Un opérateur est donné par sa matrice.

Définissons la distance entre deux opérateurs comme la norme de leur différence : $\rho(A, B) = \|A - B\|$.

THÉORÈME. *L'espace des opérateurs linéaires L muni de la métrique ρ est un espace métrique complet* *).

Vérifions que ρ est bien une métrique.

Par définition, $\rho > 0$ si $A \neq B$, $\rho(A, A) = 0$, $\rho(B, A) = \rho(A, B)$. L'inégalité du triangle $\rho(A, C) \leqslant \rho(A, B) + \rho(B, C)$ découle de l'inégalité $\|X + Y\| \leqslant \|X\| + \|Y\|$ de l'exercice 2 pt. 1 ($X = A - B$, $Y = B - C$). Par conséquent, la métrique ρ confère à L une structure d'espace métrique. Sa complétude est également évidente.

3. Démonstration de la complétude. Soit $\{A_i\}$ une suite de Cauchy, i.e. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon) : \rho(A_m, A_k) < \varepsilon$, $\forall m, k > N$. Soit $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$. Considérons la suite de points $\boldsymbol{x}_i \in \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{x}_i = A_i\boldsymbol{x}$ et montrons qu'elle est une suite de Cauchy pour la métrique euclidienne $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$. En effet, d'après la définition de la norme d'un opérateur, pour $m, k > N$ on a

$$\|\boldsymbol{x}_m - \boldsymbol{x}_k\| \leqslant \rho(A_m, A_k)\|\boldsymbol{x}\| \leqslant \varepsilon\|\boldsymbol{x}\|.$$

$\|\boldsymbol{x}\|$ étant un nombre fixe (indépendant de m et de k), il s'ensuit que $\{\boldsymbol{x}_i\}$ est une suite de

---

*) On appelle *espace métrique* le couple (M, ϱ) formé par un ensemble M et une fonction $\varrho : M \times M \to \mathbf{R}$, appelée *métrique*, jouissant des propriétés suivantes :

1) $\varrho(x, y) \geqslant 0$, $(\varrho(x, y) = 0) \Leftrightarrow (x = y)$;
2) $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)\ \forall\, x, y \in M$;
3) $\varrho(x, y) \leqslant \varrho(x, z) + \varrho(z, y)\ \forall\, x, y, z \in M$.

Une suite x_i de points d'un espace métrique M s'appelle *suite de Cauchy* si $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$: $\varrho(x_i, x_j) < \varepsilon\ \forall\, i, j > N$. Cette suite x_i *converge* au point x si $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$: $\varrho(x, x_i) < \varepsilon\ \forall\, i > N$. Un espace est *complet* si toute suite de Cauchy y est convergente.

Cauchy. L'espace $\mathbf{R}^n$ est complet. Il existe donc la limite

$$y = \lim_{i \to \infty} x_i \in \mathbf{R}^n.$$

Remarquons que $\|x_k - y\| \leqslant \varepsilon \|x\|$ lorsque $k > N(\varepsilon)$ et que, comme ci-dessus, $N(\varepsilon)$ est un nombre ne dépendant pas de x.

Le point y dépend linéairement du point x (la limite d'une somme étant égale à la somme des limites). Nous obtenons l'opérateur linéaire $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, $Ax = y$, $A \in L$.

Nous voyons que lorsque $k > N(\varepsilon)$

$$\rho(A_k, A) = \|A_k - A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|x_k - y\|}{\|x\|} \leqslant \varepsilon.$$

Donc, $A = \lim_{k \to \infty} A_k$ et l'espace L est complet.

EXERCICE. Montrer qu'une suite d'opérateurs A_i converge si, et seulement si, il en est de même de la suite de leurs matrices dans une base donnée.

En déduire une autre démonstration de la complétude.

4. Séries. Soit M un espace vectoriel réel, muni d'une structure d'espace métrique complet par une métrique ρ telle que la distance séparant deux points quelconques de M dépend uniquement de leur différence et de plus $\rho(\lambda x, 0) = |\lambda| \rho(x, 0)$ ($x \in M$, $\lambda \in \mathbf{R}$). Un tel espace est appelé *espace normé*, la fonction $\rho(x, 0)$ est appelée *norme* de x et désignée par $\|x\|$.

EXEMPLE 1. L'espace euclidien $M = \mathbf{R}^n$ muni de la métrique

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x - y)(x - y)}.$$

EXEMPLE 2. L'espace L des opérateurs linéaires dans $\mathbf{R}^n$, muni de la métrique $\rho(A, B) = \|A - B\|$.

Nous désignerons dans la suite par $\|A - B\|$ la distance séparant deux éléments A et B de M.

Puisque les éléments de M peuvent être additionnés et multipliés par un nombre et que les suites de Cauchy possèdent une limite dans M, les séries de la forme

$$A_1 + A_2 + \dots, \qquad A_i \in M,$$

obéissent aux mêmes lois que les séries numériques.

La théorie des séries fonctionnelles s'étend immédiatement aux fonctions à valeurs dans M.

EXERCICE. Démontrer les deux theorèmes suivants :

CRITÈRE DE WEIERSTRASS. *Si une série* $\sum_{i=1}^{\infty} f_i$ *de fonctions* $f_i : X \to M$ *est majorée par une série numérique convergente*

$$\|f_i\| \leqslant a_i, \quad \sum_{i=1}^{\infty} a_i < \infty, \quad a_i \in \mathbf{R},$$

alors elle converge uniformément et absolument sur X.

DÉRIVATION D'UNE SÉRIE. *Si une série $\sum f_i$ de fonctions $f_i : \mathbf{R} \to M$ est convergente, elle converge vers la dérivée* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{i=1}^{\infty} f_i$ (t étant une coordonnée sur la droite $\mathbf{R}$) *pourvu que la série des dérivées* $\frac{\mathrm{d}f_i}{\mathrm{d}t}$ *soit uniformément convergente.*

Nota. On trouvera dans le cours d'analyse la démonstration pour le cas où $M = \mathbf{R}$. Cette démonstration se généralise *ad litteram*.

5. Définition de l'exponentielle e^A. Soit $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ un opérateur linéaire.

DÉFINITION. On appelle *exponentielle* e^A de l'opérateur A l'opérateur linéaire dans $\mathbf{R}^n$

$$e^A = E + A + \frac{A^2}{2!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

(où E est l'opérateur unité, i.e. $Ex = x$).

THÉORÈME. *La série e^A est uniformément convergente pour tout A sur chaque ensemble $X = \{A : \|A\| \leqslant a\}$, $a \in \mathbf{R}$.*

Démonstration. Posons $\|A\| \leqslant a$. Notre série est alors majorée par la série numérique $1 + a + \frac{a^2}{2!} + \ldots$ qui converge vers e^a. D'après le critère de Weierstrass la série e^A est uniformément convergente pour $\|A\| \leqslant a$.

EXERCICE. Calculer la matrice e^{At} si la matrice A est de la forme

$$1)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad 2)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad 3)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad 4)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Réponse. $1)\ \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}, \quad 2)\ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 3)\ \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad 4)\ \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

6. Exemple. Considérons l'ensemble des polynômes de la variable x de degré $<n$ et à coefficients réels.

Cet ensemble possède une structure naturelle d'espace vectoriel réel, les polynômes pouvant être additionnés et multipliés par un nombre.

EXERCICE 1. Trouver la dimension de l'espace des polynômes de degré $<n$.
Réponse. n ; on peut, par exemple, prendre pour base $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$.

Nous désignerons l'espace des polynômes de degré $<n$ par $\mathbf{R}^n$ *). La dérivée d'un polynôme de degré $<n$ est un polynôme de degré $<n$. On détermine de la sorte l'application

$$A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n, Ap = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}.$$

EXERCICE 2. Montrer que A est un opérateur linéaire ; trouver son noyau et son image.
Réponse. $\operatorname{Ker} A = \mathbf{R}^1$; $\operatorname{Im} A = \mathbf{R}^{n-1}$.

Soit par ailleurs H^t ($t \in \mathbf{R}$) un opérateur de translation, qui transforme le polynôme $p(x)$ en $p(x + t)$.

EXERCICE 3. Montrer que $H^t : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ est un opérateur linéaire. Trouver son noyau et son image.
Réponse. $\operatorname{Ker} H^t = 0$, $\operatorname{Im} H^t = \mathbf{R}^n$.

Composons maintenant l'opérateur e^{At}.

THÉORÈME. $e^{At} = H^t$.

Démonstration. Dans le cours d'analyse, ce théorème porte le nom de *formule de Taylor pour les polynômes* :

$$p(x + t) = p(x) + \frac{t}{1!}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + \frac{t^2}{2!}\frac{\mathrm{d}^2p}{\mathrm{d}x^2} + \dots$$

7. L'exponentielle d'un opérateur diagonal. Supposons que la matrice définissant l'opérateur A est une matrice diagonale et soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses éléments diagonaux. On constate aisément que la matrice associée à l'opérateur e^A est aussi une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}$.

DÉFINITION. Un opérateur $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ est *diagonal* si la matrice qui le représente est diagonale dans une base quelconque. Cette base est appelée *base propre*.

---

*) Ainsi nous identifions l'espace des polynômes, où nous avons fait choix de la base indiquée plus haut, à l'espace arithmétique $\mathbf{R}^n$ qui lui est isomorphe.

EXERCICE 1. Citer un exemple d'opérateur non diagonal.

EXERCICE 2. Montrer que les valeurs propres d'un opérateur diagonal A sont réelles.

EXERCICE 3. Montrer que si les n valeurs propres d'un opérateur $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ sont toutes réelles et distinctes, cet opérateur est diagonal.

Si A est un opérateur diagonal, il est plus facile de calculer e^A dans une base propre.

EXEMPLE. Supposons que la matrice associée à l'opérateur A soit de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

dans la base e_1, e_2. Les valeurs propres $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 0$ étant réelles et distinctes, l'opérateur A est diagonal. La base propre est $f_1 = e_1 + e_2, f_2 = e_1 - e_2$. Dans cette base, la matrice associée à l'opérateur A s'écrit

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'où il vient pour la matrice associée à l'opérateur e^A dans la base propre

$$\begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans la base initiale la matrice associée à l'opérateur e^A s'écrit finalement :

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^2 + 1 & e^2 - 1 \\ e^2 - 1 & e^2 + 1 \end{pmatrix}.$$

8. L'exponentielle d'un opérateur nilpotent.

DÉFINITION. Un opérateur $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ est appelé *nilpotent* si l'une quelconque de ses puissances est nulle.

EXERCICE 1. Montrer que l'opérateur défini par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est nilpotent. D'une façon générale, est nilpotent tout opérateur associé à une matrice dont sont nuls les éléments situés sur et sous la diagonale principale.

EXERCICE 2. Montrer que l'opérateur de dérivation $\frac{d}{dx}$ est un opérateur nilpotent dans l'espace des polynômes de degré $< n$.

Si un opérateur A est nilpotent, la série e^A s'interrompt, i.e. se ramène à une somme finie.

EXERCICE 3. Calculer e^{tA} ($t \in \mathbf{R}$), où $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ est un opérateur associé à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

(nous avons des nombres 1 seulement au-dessus de la diagonale principale).

Nota. Cet exercice peut être résolu de plusieurs manières, dont l'une fait appel à la formule de Taylor pour les polynômes. L'opérateur de dérivation $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ est représenté par une matrice de la forme indiquée ci-dessus dans une certaine base (indiquer laquelle). Voir solution au § 25.

9. Les quasi-polynômes. Soit un nombre réel λ. On appelle *λ-quasi-polynôme* le produit $e^{\lambda x}p(x)$, où p est un polynôme. On appelle *degré* du quasi-polynôme le degré du polynôme p. Fixons la valeur de l'exposant λ.

EXERCICE 1. Montrer que l'ensemble des λ-quasi-polynômes de degré $<n$ est un espace vectoriel. En déterminer la dimension.

Réponse. n. On peut prendre pour base, par exemple, $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \ldots, x^{n-1}e^{\lambda x}$.

REMARQUE. La notion de λ-quasi-polynôme de même d'ailleurs que celle de polynôme est définie avec une certaine ambiguïté. En effet, on peut comprendre un (λ-quasi-)polynôme soit comme une *expression* composée de signes et de lettres et dans ce cas la solution de l'exercice précédent est évidente, soit comme une *fonction*, i.e. une application $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

En réalité, ces deux notions sont équivalentes (lorsque les coefficients des polynômes sont des nombres réels ou complexes ; dans notre cas les coefficients des (λ-quasi-) polynômes sont des nombres réels).

EXERCICE 2. Montrer que si une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ se représente par un λ-quasi-polynôme, cette représentation est unique.

Nota. Il suffit de démontrer que la relation $e^{\lambda x}p(x) \equiv 0$ entraîne la nullité de tous les coefficients du polynôme $p(x)$.

Désignons par $\mathbf{R}^n$ l'espace vectoriel des λ-quasi-polynômes de degré $<n$.

THÉORÈME. *L'opérateur de dérivation $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ est un opérateur linéaire dans $\mathbf{R}^n$, et pour tout $t \in \mathbf{R}$,*

$$e^{t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}} = H^t, \tag{3}$$

où $H^t : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ *est un opérateur de translation* (i.e. $(H^t f)(x) = f(x + t)$).

Démonstration. Nous devons démontrer tout d'abord que la dérivée et le translaté d'un λ-quasi-polynôme de degré $<n$ sont des λ-quasi-polynômes de degré $<n$.

En effet,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^{\lambda x}p(x)) = \lambda e^{\lambda x}p(x) + e^{\lambda x}p'(x),$$

$$e^{\lambda(x+t)}p(x + t) = e^{\lambda x}(e^{\lambda t}p(x + t)).$$

La linéarité de la dérivation et de la translation ne fait aucun doute. Il nous reste à remarquer que la série de Taylor d'un λ-quasi-polynôme est absolument convergente sur la droite tout entière (puisque sont absolument convergentes les séries de Taylor de $e^{\lambda x}$ et de $p(x)$), ce que montre la formule (3).

EXERCICE 3. Calculer la matrice définissant l'opérateur e^{At} si la matrice A est de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdot & & 0 \\ & \lambda & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & 1 \\ 0 & & & \cdot & \lambda \end{pmatrix}$$

(les éléments de la matrice sont égaux à λ sur la diagonale principale, à 1 au-dessus de cette diagonale et à 0 partout ailleurs). On calculera, par exemple,

$$\exp\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nota. C'est précisément de cette forme qu'est la matrice associée à l'opérateur de dérivation dans l'espace des λ-quasi-polynômes (dire dans quelle base). Voir solution au § 25.

§ 15. Propriétés de l'exponentielle

Etablissons maintenant quelques propriétés de l'opérateur $e^A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, propriétés qui nous permettront d'utiliser e^A pour résoudre des équations différentielles linéaires.

1. Propriété de groupe. Soit un opérateur linéaire $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$.

THÉORÈME. *La famille des opérateurs linéaires* $e^{tA} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, $t \in \mathbf{R}$, *engendre un groupe à un paramètre de transformations linéaires de* $\mathbf{R}^n$.

Démonstration. Puisque nous savons déjà que e^{tA} est un opéra-

teur linéaire, il nous suffit seulement de démontrer que

$$e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA} \tag{1}$$

et que e^{tA} est dérivable par rapport à t. Nous démontrerons que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{tA} = Ae^{tA} \tag{2}$$

comme pour toute exponentielle.

Pour démontrer la propriété de groupe (1), effectuons le produit des séries formelles des puissances de A :

$$\left(E + tA + \frac{t^2}{2}A + \dots\right)\left(E + sA + \frac{s^2}{2}A^2 + \dots\right) =$$

$$= E + (t+s)A + \left(\frac{t^2}{2} + ts + \frac{s^2}{2}\right)A^2 + \dots$$

Dans ce produit, le coefficient de A^k sera égal à $(t+s)^k/(k!)$, puisque la formule (1) s'applique aux séries numériques ($A \in \mathbf{R}$). Il nous reste à établir la légitimité de la multiplication terme à terme. Celle-ci s'établit de la même façon que celle de la multiplication terme à terme des séries numériques absolument convergentes (les séries e^{tA} et e^{sA} sont absolument convergentes, puisque sont convergentes les séries $e^{|t|a}$, $e^{|s|a}$, où $a = \|A\|$). Voici une autre démonstration.

LEMME. *Si $p \in \mathbf{R}[z_1, \dots, z_N]$ est un polynôme à coefficients positifs des variables $z_1, \dots, z_N$, et $A_1, \dots, A_N : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ des opérateurs linéaires, alors*

$$\|p(A_1, \dots, A_N)\| \leqslant p(\|A_1\|, \dots, \|A_N\|).$$

Démonstration. Elle découle des inégalités

$$\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|, \quad \|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|, \quad \|\lambda A\| = |\lambda|\|A\|.$$

Le lemme est démontré.

Désignons par $S_m(A)$ la somme partielle de la série de e^A :

$$S_m(A) = \sum_{k=0}^{m} \frac{A^k}{k!}.$$

S_m est un polynôme en A à coefficients positifs. Il nous faut montrer que la différence

$$\Delta_m = S_m(tA)S_m(sA) - S_m((t+s)A)$$

tend vers 0 lorsque $m \to \infty$.

Il importe de remarquer que Δ_m est un polynôme en sA et tA à *coefficients positifs*. En effet, dans la série-produit tous les termes dont l'exposant en A est $\leqslant m$ s'obtiennent par multiplication des termes des séries-facteurs dont l'exposant est $\leqslant m$. Par ailleurs, $S_m((s+t)A)$

est une somme partielle de la série-produit. Pour cette raison donc Δ_m est la somme de tous les termes du produit $S_m(tA)S_m(sA)$, dont l'exposant en A est $>m$. Or les coefficients du produit de polynômes à coefficients positifs sont tous positifs.

D'après le lemme, $\|\Delta_m(tA, sA)\| \leqslant \Delta_m(\|tA\|, \|sA\|)$. Désignons respectivement par τ et σ les nombres positifs $\|tA\|$ et $\|sA\|$. Il vient

$$\Delta_m(\tau, \sigma) = S_m(\tau)S_m(\sigma) - S_m(\tau + \sigma).$$

Puisque $e^\tau e^\sigma = e^{\tau+\sigma}$, le deuxième membre tend vers 0 lorsque $m \to \infty$. Donc $\lim_{m\to\infty} \Delta_m(tA, sA) = 0$ et la relation (1) est démontrée.

Pour démontrer la propriété (2) dérivons formellement la série e^{At} par rapport à t ; nous obtenons la série de dérivées :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dt}\frac{t^k}{k!}A^k = A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}A^k,$$

série qui converge absolument et uniformément tout comme la série initiale dans tout domaine $\|A\| \leqslant a$, $|t| \leqslant T$. La dérivée de la somme de la série existe donc et elle est égale à la somme de la série des dérivées. Le théorème est démontré.

EXERCICE 1. Est-il toujours vrai que $e^{A+B} = e^A e^B$?

Réponse. Non.

EXERCICE 2. Montrer que $\det e^A \neq 0$.

Nota. $e^{-A} = (e^A)^{-1}$.

EXERCICE 3. Montrer que si dans un espace euclidien A est un opérateur symétrique gauche, e^A est un opérateur orthogonal.

2. Théorème fondamental de la théorie des équations linéaires à coefficients constants. Du théorème démontré nous déduisons immédiatement la formule donnant la solution de l'équation linéaire

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbf{R}^n. \tag{3}$$

THÉORÈME. *L'équation* (3) *avec la condition initiale* $\varphi(0) = x_0$ *admet pour solution*

$$\varphi(t) = e^{tA}x_0, \quad t \in \mathbf{R}. \tag{4}$$

Démonstration. D'après la formule de dérivation (2)

$$\frac{d\varphi}{dt} = Ae^{tA}x_0 = A\varphi(t).$$

φ est donc solution. Puisque $e^0 = E$, $\varphi(0) = x_0$. Ce qui achève la démonstration car d'après le théorème d'unicité toute solution coïncide dans son domaine de définition avec la solution (4).

3. Forme générale des groupes à un paramètre de transformations linéaires de l'espace $\mathbf{R}^n$.

THÉORÈME. *Soit* $\{g^t : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n\}$ *un groupe à un paramètre de transformations linéaires. Il existe alors un opérateur linéaire* $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ *tel que* $g^t = e^{At}$.

Démonstration. Posons

$$A = \left.\frac{\mathrm{d}g^t}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \lim_{t \to 0} \frac{g^t - E}{t}.$$

Nous avons déjà montré que l'orbite $\varphi(t) = g^t x_0$ est la solution de l'équation (3) qui vérifie la condition initiale $\varphi(0) = x_0$. D'après (4) on a $g^t x_0 = e^{tA} x_0$. C.Q.F.D.

L'opérateur A porte le nom d'*opérateur générateur* du groupe $\{g^t\}$.

EXERCICE. Montrer que l'opérateur générateur est défini d'une manière unique par le groupe $\{g^t\}$.

REMARQUE. Il existe donc une correspondance biunivoque entre les équations différentielles linéaires (3) et leurs flots $\{g^t\}$, ces derniers étant composés de difféomorphismes linéaires.

4. Deuxième définition de l'exponentielle.

THÉORÈME. *Soit* $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ *un opérateur linéaire. Alors*

$$e^A = \lim_{m \to \infty} \left(E + \frac{A}{m}\right)^m. \tag{5}$$

Démonstration. Considérons la différence

$$e^A - \left(E + \frac{A}{m}\right)^m = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} - \frac{C_m^k}{m^k}\right) A^k.$$

(Cette série est convergente car $\left(E + \frac{A}{m}\right)^m$ est un polynôme et la série e^A est convergente.) Remarquons que les coefficients de cette différence sont positifs :

$$\frac{1}{k!} \geqslant \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{m \cdot m \cdot \dots \cdot m} \frac{1}{k!}.$$

C'est pourquoi en posant $\|A\| = a$, on a

$$\left\| e^A - \left(E + \frac{A}{m}\right)^m \right\| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} - \frac{C_m^k}{m^k}\right) a^k = e^a - \left(1 + \frac{a}{m}\right)^m.$$

La dernière expression tend vers 0 lorsque $m \to \infty$, ce qui démontre le théorème.

5. Exemple : formule d'Euler pour e^z. Soit la droite complexe **C**. Nous pouvons la considérer comme le plan numérique $\mathbf{R}^2$, et la multiplication par un nombre complexe z comme un opérateur linéaire $A : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$. L'opérateur A définit une similitude d'angle Arg z et de rapport $|z|$.

EXERCICE 1. Trouver la matrice du produit par $z = u + iv$ dans la base $e_1 = 1, e_2 = i$.

Réponse. $\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}$.

Déterminons maintenant e^A. D'après la formule (5) il faut d'abord définir l'opérateur $E + \frac{A}{n}$, qui est un produit par le nombre $1 + \frac{z}{n}$, i.e. une similitude d'angle $\operatorname{Arg}\left(1 + \frac{z}{n}\right)$ et de rapport $\left|1 + \frac{z}{n}\right|$ (fig. 110).

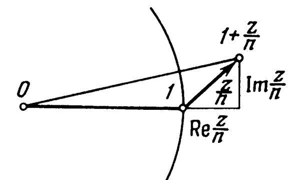


Fig. 110. Le nombre complexe $1 + \frac{z}{n}$

EXERCICE 2. Montrer que lorsque $n \to \infty$

$$\operatorname{Arg}\left(1 + \frac{z}{n}\right) = \operatorname{Im}\frac{z}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$
$$\left|1 + \frac{z}{n}\right| = 1 + \operatorname{Re}\frac{z}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right). \tag{6}$$

L'opérateur $\left(E + \frac{A}{n}\right)^n$ définit une similitude d'angle $n \operatorname{Arg}\left(1 + \frac{z}{n}\right)$ et de rapport $\left|1 + \frac{z}{n}\right|^n$. Des formules (6) nous déduisons les limites de l'angle et du rapport de similitude :

$$\lim_{n\to\infty} n \operatorname{Arg}\left(1 + \frac{z}{n}\right) = \operatorname{Im} z, \quad \lim_{n\to\infty}\left|1 + \frac{z}{n}\right|^n = e^{\operatorname{Re} z}.$$

Nous venons ainsi de démontrer le

THÉORÈME. *Soient $z = u + iv$ un nombre complexe et $A : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ l'opérateur de multiplication par z. Alors e^A est l'opérateur de multiplication par le nombre complexe e^u* $(\cos v + i \sin v)$.

DÉFINITION. Le nombre complexe $e^u (\cos v + i \sin v) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ est appelé *exponentielle* du nombre complexe $z = u + iv$. On la désigne par

$$e^z = e^u (\cos v + i \sin v). \quad (7)$$

REMARQUE. Si l'on ne fait pas de distinction entre un nombre complexe et l'opérateur de multiplication par ce nombre, la définition se transforme en théorème étant donné que l'exponentielle de l'opérateur a déjà été définie.

EXERCICE 3. Trouver e^0, e^1, e^i, $e^{\pi i}$, $e^{2\pi i}$.
EXERCICE 4. Montrer que $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$ $(z_1 \in \mathbf{C}, z_2 \in \mathbf{C})$.

REMARQUE. Vu que l'exponentielle peut également être définie par une série, on a

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots, \qquad z \in \mathbf{C} \quad (8)$$

(cette série converge absolument et uniformément sur chaque disque $|z| \leqslant a$).

EXERCICE 5. Déduire les développements en séries de Taylor de $\sin v$ et $\cos v$ en comparant la série (8) à la formule d'Euler (7).

REMARQUE. Inversement, si l'on connaît les développements en séries de Taylor de $\sin v$, $\cos v$, e^u on démontre la formule (7) en adoptant la formule (8) pour définition de e^z.

6. Méthode de la tangente. En groupant les formules (4) et (5) on obtient une méthode de résolution approchée de l'équation différentielle (3), connue sous le nom de *méthode de la tangente* ou *méthode d'Euler*.

Considérons une équation différentielle définie par un champ de vecteurs $\boldsymbol{v}$ sur l'espace des phases vectoriel $\mathbf{R}^n$. Pour trouver la solution $\boldsymbol{\varphi}$ de l'équation $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{v}(x)$, $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$, qui vérifie la condition initiale $\boldsymbol{x}_0$ nous allons procéder comme suit (fig. 111). Nous connaissons la vitesse au point $\boldsymbol{x}_0$: c'est $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}_0)$. En partant de $\boldsymbol{x}_0$ nous allons nous déplacer à cette vitesse pendant un temps $\Delta t = t/N$. Nous nous retrouvons au point $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}_0)\Delta t$. L'intervalle de temps suivant Δt, nous nous déplacerons à la vitesse $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}_1)$ à partir du point $\boldsymbol{x}_1$ et ainsi de suite :

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}_k)\Delta t, \qquad k = 0, 1, \dots, N - 1.$$

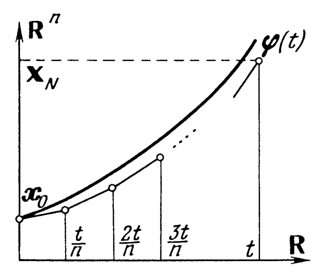


Fig. 111. Ligne polygonale d'Euler

Désignons par $X_N(t)$ le dernier point x_N. Remarquons que ce mouvement, dont la vitesse est constante par morceaux, est représenté graphiquement par une ligne polygonale de N segments tangents à la courbe intégrale dans l'espace $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$, appelée *ligne polygonale d'Euler*. Lorsque $N \to \infty$, cette ligne tend naturellement vers la courbe intégrale, si bien que lorsque N est suffisamment grand le dernier point X_N tendra vers la valeur $\varphi(t)$ prise au point t par la solution vérifiant la condition initiale $\varphi(0) = x_0$.

THÉORÈME. *Pour l'équation linéaire* (3)

$$\lim_{N \to \infty} X_N(t) = \varphi(t).$$

Démonstration. De par la construction même de la ligne polygonale d'Euler pour $v(x) = Ax$ on a

$$X_N = \left(E + \frac{At}{N}\right)^N x_0.$$

Aussi $\lim_{N \to \infty} X_N = e^{tA} x_0$ (voir (5)). Donc $\lim_{N \to \infty} X_N = \varphi(t)$ (voir (4)).

EXERCICE. Montrer que non seulement l'extrémité de la ligne polygonale d'Euler tend vers $\varphi(t)$, mais que la suite tout entière des fonctions linéaires par morceaux $\varphi_n : I \to \mathbf{R}^n$, représentées graphiquement par les segments de cette ligne, converge uniformément vers la solution φ sur l'intervalle $[0, t]$.

REMARQUE. Dans le cas général (i.e. lorsque le champ de vecteurs n'est pas linéaire en x) la ligne polygonale d'Euler peut s'écrire sous la forme

$$X_N = \left(E + \frac{At}{N}\right)^N x_0,$$

où A est un opérateur non linéaire associant au point x le point $v(x)$. Nous verrons par la suite que dans ce cas la ligne polygonale tend encore vers la solution, du moins, pour des valeurs suffisamment petites de $|t|$ (§ 31, 9). Par conséquent, l'expression (4) dans laquelle l'exponentielle est définie

par la formule (5) permet en général de résoudre toutes les équations différentielles *).

La théorie eulérienne de l'exponentielle, uniforme dans toutes ses variantes, qu'il s'agisse de la détermination du nombre e, des formules d'Euler de e^z, de la formule de Taylor, de la formule (4) de résolution des équations linéaires ou de la méthode de la tangente, se connaît d'autres applications qui sortent du cadre de notre cours.

§ 16. Déterminant de l'exponentielle

Si un opérateur A est défini par sa matrice, la détermination de la matrice associée à l'opérateur e^A nécessite de longs calculs. Cependant nous allons voir qu'il est très facile de calculer le déterminant de la matrice e^A.

1. Déterminant d'un opérateur. Soit un opérateur linéaire $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$.

DÉFINITION. On appelle *déterminant* de l'opérateur A le déterminant de la matrice associée à l'opérateur A dans une base quelconque $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$; on le désigne par le symbole det A.

Le déterminant de la matrice représentant l'opérateur A ne dépend pas de la base. En effet, si (A) représentait la matrice associée à l'opérateur A dans la base $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, la matrice associée à l'opérateur A dans une autre base s'écrirait $(B)(A)(B^{-1})$ et

$$\det (B)(A)(B^{-1}) = \det (A).$$

Le déterminant de la matrice est le volume orienté d'un parallélépipède **) *dont les arêtes sont définies par les colonnes de la matrice.*

Si, par exemple, $n = 2$ (fig. 112), le déterminant

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

*) Pratiquement, il n'est pas très commode de résoudre une équation différentielle par approximations à l'aide de la méthode de la tangente en raison du très petit pas Δt qu'il faut prendre pour obtenir la précision voulue. On use souvent de diverses améliorations de cette méthode, où la courbe intégrale est approchée non pas par un segment de droite, mais par un segment de parabole d'un degré quelconque. Les plus usitées, les méthodes d'Adams, Sterner, Runge sont exposées dans des ouvrages de calcul approché.

**) Le parallélépipède d'arêtes $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbf{R}^n$ est le sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$ formé de tous les points de la forme $x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n$, $0 \leqslant x_i \leqslant 1$. Si $n = 2$, le parallélépipède est appelé parallélogramme. Si on connaît une définition quelconque de la notion de volume, on peut facilement démontrer l'assertion faite. Dans le cas contraire, on peut adopter cette assertion pour définition du volume d'un parallélépipède.

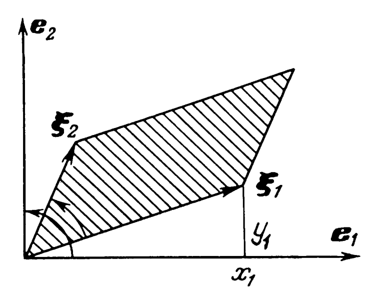


Fig. 112. Le déterminant de la matrice est égal à l'aire orientée du parallélogramme construit sur les colonnes

représente l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs ξ_1 et ξ_2 de composantes (x_1, y_1) et (x_2, y_2), affectée du signe plus ou moins selon que le couple ordonné de vecteurs (ξ_1, ξ_2) est de sens direct ou rétrograde.

Dans la base $e_1, \ldots, e_n$, la i-ième colonne de la matrice définissant l'opérateur A est formée des coordonnées de l'image du vecteur de base Ae_i. Donc, *le déterminant de l'opérateur A mesure le volume orienté de l'image du cube unitaire (i.e. du parallélépipède d'arêtes $e_1, \ldots, e_n$) par l'application A.*

EXERCICE. Soit Π un parallélépipède dont les arêtes sont linéairement indépendantes. Montrer que le rapport du volume (orienté) de l'image du parallélépipède $A\Pi$ au volume (orienté) Π ne dépend pas de Π et est égal à $\det A$.

REMARQUE. Le lecteur initié aux calculs des volumes dans $\mathbf{R}^n$ pourra remplacer Π par un volume quelconque.

Donc, *le déterminant de l'opérateur A est le coefficient de variation du volume orienté : une application de A fait varier de* $\det A$ *fois le volume orienté de toute figure.* Géométriquement, il n'est pas très évident que les volumes de toutes les figures se dilatent de la même façon (même dans le cas d'un plan), car les formes se modifient notablement sous l'effet d'une application linéaire.

2. Trace d'un opérateur. On appelle *trace d'une matrice A* la somme des éléments situés sur la diagonale principale. On la désigne par tr :

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

La trace de la matrice représentant l'opérateur $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ ne dépend pas de la base, mais seulement de l'opérateur A.

EXERCICE. Montrer que la trace d'une matrice est égale à la somme de ses n valeurs propres et son déterminant, à leur produit.

Nota. Appliquer la formule de Viète au polynôme

$$\det |A - \lambda E| = (-\lambda)^n + (-\lambda)^{n-1} \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \ldots$$

Les valeurs propres sont indépendantes de la base. D'où la

DÉFINITION. On appelle *trace d'un opérateur A* la trace de la matrice qui lui est associée par rapport à une base quelconque.

3. Relation entre le déterminant et la trace. Soit un opérateur linéaire $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ et $\varepsilon \in \mathbf{R}$. On établit aisément le

THÉORÈME. *Lorsque* $\varepsilon \to 0$

$$\det (E + \varepsilon A) = 1 + \varepsilon \operatorname{tr} A + O(\varepsilon^2).$$

Démonstration. Le déterminant de l'opérateur $E + \varepsilon A$ est égal au produit des valeurs propres. Les valeurs propres de l'opérateur $E + \varepsilon A$ (compte tenu de leurs multiplicités) sont égales à $1 + \varepsilon\lambda_i$, où λ_i sont les valeurs propres de A. Donc

$$\det (E + \varepsilon A) = \prod_{i=1}^{n} (1 + \varepsilon\lambda_i) = 1 + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \lambda_i + O(\varepsilon^2).$$

C.Q.F.D.

Autre démonstration. Il est clair que $\varphi(\varepsilon) = \det (E + \varepsilon A)$ est un polynôme en ε pour lequel $\varphi(0) = 1$. Il suffit de démontrer que $\varphi'(0) = \operatorname{tr} A$. Désignons par $\Delta(\{x_{ij}\})$ le déterminant de la matrice $\|x_{ij}\|$. La règle de dérivation d'une fonction composée nous donne

$$\left.\frac{d\varphi}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \sum_{i,j=1}^{n} \left.\frac{\partial\Delta}{\partial x_{ij}}\right|_E \frac{dx_{ij}}{d\varepsilon},$$

où $x_{ij}(\varepsilon)$ sont les éléments de la matrice $E + \varepsilon A$. Par définition la dérivée partielle $\left.\frac{\partial\Delta}{\partial x_{ij}}\right|_E$ est égale à $\left.\frac{d}{dh}\right|_{h=0} \det (E + he_{ij})$, où e_{ij} est une matrice dont l'unique élément non nul 1 se trouve dans la i-ième ligne et la j-ième colonne. Or $\det (E + he_{ij}) = 1$ lorsque $i \neq j$ et $1 + h$ lorsque $i = j$. Donc $\left.\frac{\partial\Delta}{\partial x_{ij}}\right|_E = 0$ si $i \neq j$ et 1 si $i = j$. Par conséquent,

$$\left.\frac{d\varphi}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{dx_{ii}}{d\varepsilon} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \operatorname{tr} A.$$

C.Q.F.D.

Soit dit en passant nous venons de nouveau de démontrer que la trace est indépendante de la base.

COROLLAIRE. *Une faible variation des arêtes du parallélépipède n'a d'effet sur le volume que si elle a lieu dans la direction propre de chaque arête ; une variation dans la direction des autres arêtes modifie le volume d'un infiniment petit du deuxième ordre seulement.*

L'aire d'un parallélogramme proche d'un carré (fig. 113) diffère de l'aire du rectangle hachuré d'un infiniment petit du deuxième ordre.

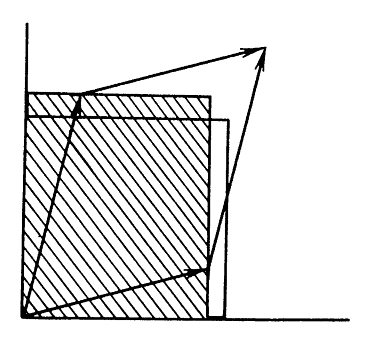


Fig. 113. Détermination approximative de l'aire d'un parallélogramme proche d'un carré

On aurait pu démontrer ce corollaire par des méthodes géométriques élémentaires, ce qui nous aurait amené à démontrer géométriquement le théorème précédent.

4. Déterminant de l'opérateur e^A.

THÉORÈME. *Pour tout opérateur linéaire* $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$

$$\det e^A = e^{\operatorname{tr} A}.$$

Démonstration. D'après la deuxième définition de l'exponentielle

$$\det e^A = \det \left(\lim_{m\to\infty} \left(E + \frac{A}{m} \right)^m \right) = \lim_{m\to\infty} \left(\det \left(E + \frac{A}{m} \right)^m \right),$$

car le déterminant de la matrice est un polynôme (donc une fonction continue) en $\frac{A}{m}$. D'autre part, en vertu du théorème précédent

$$\det \left(E + \frac{A}{m} \right)^m = \left(\det \left(E + \frac{A}{m} \right) \right)^m =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{m} \operatorname{tr} A + O\left(\frac{1}{m^2} \right) \right)^m, \quad m \to \infty.$$

Il reste à ajouter que $\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{a}{m}+O\left(\frac{1}{m^2}\right)\right)^m = e^a$ pour tout $a \in \mathbf{R}$, et en particulier pour $a = \operatorname{tr} A$.

COROLLAIRE 1. *L'opérateur e^A est non dégénéré.*

COROLLAIRE 2. *L'opérateur e^A conserve l'orientation de $\mathbf{R}^n$* (i.e. $\det A > 0$).

COROLLAIRE 3 (FORMULE DE LIOUVILLE). *Le flot $\{g^t\}$ de l'équation linéaire*

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbf{R}^n, \tag{1}$$

pendant le temps t modifie le volume de toute figure de e^{at} fois, où $a = \operatorname{tr} A$.

En effet, $\det g^t = \det e^{At} = e^{\operatorname{tr} At} = e^{t \operatorname{tr} A}$.

Il s'ensuit en particulier le

COROLLAIRE 4. *Si la trace de A est nulle, le flot de l'équation* (1) *conserve les volumes* (*i.e. g^t transforme tout parallélépipède en un parallélépipède de même volume*).

En effet $e^0 = 1$.

EXEMPLE. Considérons l'équation du pendule ($-k$ étant le coefficient de frottement)

$$\ddot{x} = -x + k\dot{x}$$

qui est équivalente au système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + kx_2 \end{cases}$$

dont la matrice est (fig. 114) :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & k \end{pmatrix}.$$

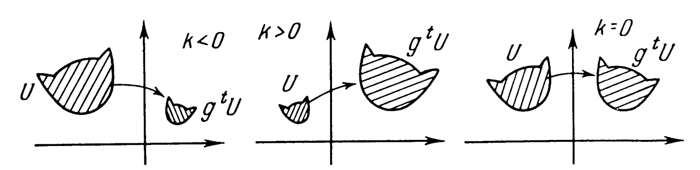


Fig. 114. Comportement des aires sous l'effet des transformations du flot de l'équation du pendule

La trace de cette matrice est égale à k. Par conséquent, lorsque $k < 0$, le flot $\{g^t\}$ ($t > 0$) associe à chaque domaine du plan de phase un domaine de moindre superficie. Au contraire, dans un système où le frottement est

négatif ($k > 0$) l'aire du domaine $g^t U (t > 0)$ est plus grande que U. Enfin, lorsqu'il n'y a pas de frottement ($k = 0$), le flot $\{g^t\}$ conserve l'aire (ce qui n'a rien d'étonnant car, dans ce cas, d'après le § 4, g^t est une rotation d'angle t).

EXERCICE 1. En supposant que les parties réelles de toutes les valeurs propres de l'opérateur A sont strictement négatives, montrer que le flot $\{g^t\}$ de l'équation (1) réduit les volumes ($t > 0$).

EXERCICE 2. Montrer que les valeurs propres de l'opérateur e^A sont égales à e^{λ_i}, où λ_i sont les valeurs propres de l'opérateur A. En déduire le théorème démontré plus haut.

§ 17. Calcul de la matrice de l'exponentielle : cas de valeurs propres réelles et distinctes

L'opérateur A étant associé à une matrice par rapport à une certaine base on demande, pour résoudre une équation, de calculer explicitement la matrice associée à l'opérateur e^A par rapport à cette même base. Commençons par le cas simple.

1. Opérateur diagonal. Considérons l'équation différentielle linéaire

$$\dot{x} = Ax, \qquad x \in \mathbf{R}^n, \tag{1}$$

où $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ est un opérateur diagonal. Dans la base où elle est diagonale, la matrice associée à l'opérateur A s'écrit

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

où λ_i sont les valeurs propres. La matrice associée à l'opérateur e^{At} prend la forme diagonale

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}.$$

Donc la solution φ qui vérifie la condition initiale $\varphi_0(0) = (x_{1_0}, \dots, x_{n_0})$ s'écrit dans cette base sous la forme $\varphi_k = e^{\lambda_k t} x_{k_0}$. Nous devons passer à cette base si la matrice associée à l'opérateur A est représentée dans une autre base.

Si les n valeurs propres de l'opérateur A sont toutes réelles et distinctes, cet opérateur est diagonal ($\mathbf{R}^n$ se décompose en une somme directe de sous-espaces à une dimension invariants par A).

Aussi, lorsque les valeurs propres de l'opérateur A sont réelles et distinctes, devra-t-on résoudre l'équation (1) de la façon suivante :

1) former l'équation *séculaire* ou *caractéristique*

$$\det |A - \lambda E| = 0 ;$$

2) trouver ses racines $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$; nous supposerons qu'elles sont toutes réelles et distinctes ;

3) trouver les vecteurs propres $\xi_1, \ldots, \xi_n$ à partir des équations linéaires $A\xi_k = \lambda_k \xi_k$, $\xi_k \neq 0$;

4) développer la condition initiale suivant les vecteurs propres

$$x_0 = \sum_{k=1}^{n} C_k \xi_k ;$$

5) écrire la réponse sous la forme

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k e^{\lambda_k t} \xi_k .$$

On obtient en particulier le

COROLLAIRE. *Soit un opérateur diagonal A. Dans toute base les éléments de la matrice e^{At} ($t \in \mathbf{R}$) sont des combinaisons linéaires des exponentielles $e^{\lambda_k t}$, où λ_k sont les valeurs propres de la matrice associée à A.*

2. Exemple. Examinons un pendule avec frottement

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - kx_2. \end{cases}$$

La matrice associée à l'opérateur A s'écrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -k \end{pmatrix}, \quad \operatorname{tr} A = -k, \quad \det A = 1.$$

L'équation caractéristique est donc $\lambda^2 + k\lambda + 1 = 0$; les racines sont réelles et distinctes lorsque le discriminant est strictement positif, i.e. lorsque $|k| > 2$. Donc, lorsque le coefficient de frottement est suffisamment grand (en valeur absolue), l'opérateur A est diagonal.

Examinons le cas où $k > 2$. Les racines λ_1, λ_2 sont toutes deux strictement négatives. Dans une base propre l'équation s'écrit sous la forme

$$\dot{y}_1 = \lambda_1 y_1, \quad \lambda_1 < 0,$$
$$\dot{y}_2 = \lambda_2 y_2, \quad \lambda_2 < 0.$$

D'où comme au § 2

$$y_1(t) = e^{\lambda_1 t} y_1(0), \quad y_2(t) = e^{\lambda_2 t} y_2(0),$$

i.e. les orbites forment un nœud (fig. 115). Lorsque $t \to +\infty$ toutes les solutions tendent vers 0 et presque toutes les courbes intégrales sont tangentes à l'axe y_1 si $|\lambda_2| > |\lambda_1|$ (à ce moment y_2 tend vers 0 plus vite que

y_1). Sur le plan (x_1, x_2) nous obtenons ce tableau par une transformation linéaire.

Supposons par exemple que $k = 3\,^1/_3$, de sorte que $\lambda_1 = -^1/_3$, $\lambda_2 = -3$.

Tirons le vecteur propre ξ_1 de la condition $x_1 = -3x_2$; nous obtenons $\xi_1 = e_2 - 3e_1$. De la même façon $\xi_2 = e_1 - 3e_2$. Puisque $|\lambda_1| < |\lambda_2|$, les orbites sont de la forme représentée sur la figure 116. Lorsqu'on examine la figure 116, on arrive à une conclusion étonnante, à savoir que si le coefficient de frottement k est suffisamment grand ($k > 2$), le pendule n'accomplit pas d'oscillations amorties mais prend immédiatement sa position d'équilibre : sa vitesse x_2 change de signe une fois au plus.

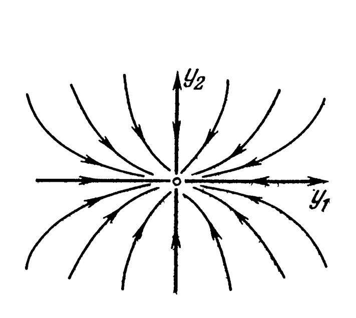


Fig. 115. Orbites de l'équation du pendule en présence d'un frottement élevé dans une base propre

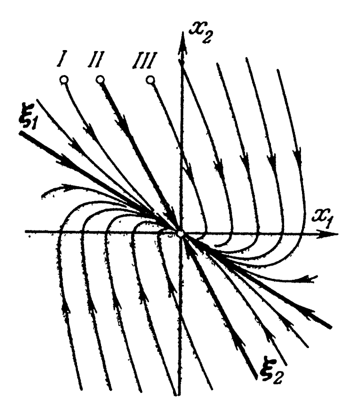


Fig. 116. Orbites de l'équation du pendule en présence d'un frottement élevé dans une base ordinaire

EXERCICE 1. A quels mouvements du pendule correspondent les orbites *I*, *II*, *III* de la fig. 116 ? Représenter approximativement le graphique de $x(t)$.

EXERCICE 2. Etudier le mouvement du pendule renversé avec frottement, $\ddot{x} = x - k\dot{x}$.

3. Cas discret. Tout ce qui vient d'être dit sur la fonction exponentielle e^{At} de la variable continue t vaut pour la fonction exponentielle A^n de l'argument discret n. En particulier, si A est un opérateur diagonal, pour calculer A^n il est plus commode de passer à une base diagonale.

EXEMPLE. La suite de Fibonacci dans laquelle chaque terme est égal à la somme des deux précédents ($a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$), les deux premiers étant $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$,

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$$

EXERCICE. Trouver la formule de a_n. Montrer que a_n croît comme une progression géométrique et trouver

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln a_n}{n} = \alpha.$$

Nota. On remarquera que le vecteur $\xi_n = (a_n, a_{n-1})$ s'exprime linéairement en fonction de ξ_{n-1} :

$$\xi_n = A\xi_{n-1}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

de plus $\xi_1 = (1, 0)$. a_n est donc la première composante du vecteur $A^{n-1}\xi_1$.

Réponse. $\alpha = \ln \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$, $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\lambda_1^n - \lambda_2^n)$, où $\lambda_{1,2} = (1 \pm \sqrt{5})/2$ sont les valeurs propres de A.

Un raisonnement identique ramène l'étude de *toute suite récurrente a_n d'ordre k*, définie par la formule

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

et par les k premiers termes *), à l'étude d'une fonction exponentielle A^n où $A : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^k$ est un opérateur linéaire. Aussi, lorsque nous apprendrons à calculer la matrice associée à une exponentielle, nous étudierons en même temps toutes les suites récurrentes.

Signalons à propos du problème général du calcul de e^{At} que les racines de l'équation caractéristique $\det(A - \lambda E) = 0$ peuvent être complexes. Avant d'aborder l'étude de ce cas examinons des équations linéaires dont l'espace des phases $\mathbf{C}^n$ est complexe.

§ 18. Complexification et réélification

Avant d'aborder l'étude des équations différentielles complexes rappelons la définition de la complexification d'un espace réel et de la réélification d'un espace complexe.

1. Réélification. Désignons par $\mathbf{C}^n$ un espace vectoriel à n dimensions sur le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes.

On appelle *réélifié* de l'espace $\mathbf{C}^n$ l'espace vectoriel réel qui coïncide avec $\mathbf{C}^n$ en tant que groupe, et sur lequel la multiplication par des nombres réels est définie comme sur $\mathbf{C}^n$ tandis qu'elle n'est pas définie par des nombres complexes. (Autrement dit, réélifier $\mathbf{C}^n$ c'est oublier sa structure de $\mathbf{C}$-module et lui conserver sa structure de $\mathbf{R}$-module.)

Il est aisé de voir que le réélifié de l'espace $\mathbf{C}^n$ est l'espace vectoriel réel $\mathbf{R}^{2n}$. Nous désignerons la réélification par la lettre $\mathbf{R}$ placée en haut et à gauche, par exemple : ${}^{\mathbf{R}}\mathbf{C} = \mathbf{R}^2$.

Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathbf{C}^n$, alors $(e_1, \ldots, e_n, ie_1, \ldots, ie_n)$ est une base de ${}^{\mathbf{R}}\mathbf{C}^n = \mathbf{R}^{2n}$.

---

*) Pour définir une suite récurrente d'ordre k, il faut en connaître les k premiers termes. Cette circonstance est étroitement liée au fait que l'espace des phases d'une équation différentielle d'ordre k est de dimension k. Ce lien devient évident si l'on représente l'équation différentielle comme une limite d'équations aux différences.

Soit $A : \mathbf{C}^m \to \mathbf{C}^n$ un opérateur $\mathbf{C}$-linéaire. Le *réélifié de l'opérateur* A est un opérateur $\mathbf{R}$-linéaire ${}^{\mathbf{R}}A : {}^{\mathbf{R}}\mathbf{C}^m \to {}^{\mathbf{R}}\mathbf{C}^n$ coïncidant point par point avec A.

EXERCICE 1. Soient $(e_1, \ldots, e_m)$ une base de l'espace $\mathbf{C}^m$, $(f_1, \ldots, f_n)$ une base de l'espace $\mathbf{C}^n$, (A) la matrice associée à l'opérateur A. Trouver la matrice associée à l'opérateur ${}^{\mathbf{R}}A$.

Réponse. $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, où $(A) = (\alpha) + i(\beta)$.

EXERCICE 2. Montrer que ${}^{\mathbf{R}}(A + B) = {}^{\mathbf{R}}A + {}^{\mathbf{R}}B$, ${}^{\mathbf{R}}(AB) = {}^{\mathbf{R}}A\,{}^{\mathbf{R}}B$.

2. Complexification. Soit l'espace vectoriel réel $\mathbf{R}^n$. Le complexifié de l'espace $\mathbf{R}^n$ est un espace vectoriel complexe à n dimensions désigné par ${}^{\mathbf{C}}\mathbf{R}^n$ et construit de la façon suivante.

Les points de l'espace ${}^{\mathbf{C}}\mathbf{R}^n$ sont les couples (ξ, η) où $\xi \in \mathbf{R}^n$, $\eta \in \mathbf{R}^n$. Ce couple est désigné par $\xi + i\eta$. Les opérations d'addition et de multiplication par des nombres complexes sont définies comme d'habitude :

$$(u + iv)(\xi + i\eta) = (u\xi - v\eta) + i(v\xi + u\eta),$$

$$(\xi_1 + i\eta_1) + (\xi_2 + i\eta_2) = (\xi_1 + \xi_2) + i(\eta_1 + \eta_2).$$

On vérifie aisément que le $\mathbf{C}$-module ainsi obtenu est un espace vectoriel complexe à n dimensions : ${}^{\mathbf{C}}\mathbf{R}^n = \mathbf{C}^n$. Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathbf{R}^n$, les vecteurs $e_k + i\mathbf{0}$ forment une $\mathbf{C}$-base de $\mathbf{C}^n = {}^{\mathbf{C}}\mathbf{R}^n$.

Les vecteurs $\xi + i\mathbf{0}$ sont désignés brièvement par le symbole ξ.

Soit $A : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ un opérateur $\mathbf{R}$-linéaire. Le *complexifié de l'opérateur* A est un opérateur $\mathbf{C}$-linéaire ${}^{\mathbf{C}}A : {}^{\mathbf{C}}\mathbf{R}^m \to {}^{\mathbf{C}}\mathbf{R}^n$ défini par la relation

$${}^{\mathbf{C}}A(\xi + i\eta) = A\xi + iA\eta.$$

EXERCICE 1. Soient $(e_1, \ldots, e_m)$ une base de $\mathbf{R}^m$ et $(f_1, \ldots, f_n)$ une base de $\mathbf{R}^n$. Si (A) est la matrice associée à l'opérateur A, trouver la matrice associée à l'opérateur complexifié $({}^{\mathbf{C}}A)$.

Réponse. $({}^{\mathbf{C}}A) = (A)$.

EXERCICE 2. Montrer que ${}^{\mathbf{C}}(A + B) = {}^{\mathbf{C}}A + {}^{\mathbf{C}}B$, ${}^{\mathbf{C}}(AB) = {}^{\mathbf{C}}A\,{}^{\mathbf{C}}B$.

REMARQUE TERMINOLOGIQUE. Les opérations de complexification et de réélification sont définies aussi bien pour les espaces que pour les applications. Les algébristes appellent *foncteurs* les opérations de cette nature.

3. Conjugaison complexe. Considérons l'espace vectoriel réel $\mathbf{R}^{2n} = {}^{\mathbf{RC}}\mathbf{R}^n$, obtenu par une complexification suivie d'une réélification de $\mathbf{R}^n$. Cet espace renferme le sous-espace à n dimensions des vecteurs de la forme $\xi + i\mathbf{0}$, $\xi \in \mathbf{R}^n$. On l'appelle *plan réel* $\mathbf{R}^n \subset \mathbf{R}^{2n}$.

Le sous-espace des vecteurs de la forme $\mathbf{0} + i\xi$, $\xi \in \mathbf{R}^n$, est appelé *plan imaginaire* $i\mathbf{R}^n \subset \mathbf{R}^{2n}$. L'espace $\mathbf{R}^{2n}$ tout entier est la somme directe de ces deux sous-espaces à n dimensions.

L'opérateur iE de multiplication par i dans $\mathbf{C}^n = {}^{\mathbf{C}}\mathbf{R}^n$, après réélification, se transforme en un opérateur $\mathbf{R}$-linéaire ${}^{\mathbf{R}}(iE) = I : \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$ (fig. 117). Cet opérateur I applique isomorphiquement le plan réel sur le plan imaginaire et inversement, le plan imaginaire sur le plan réel. Le carré de l'opérateur I est égal à l'opérateur unité affecté du signe moins.

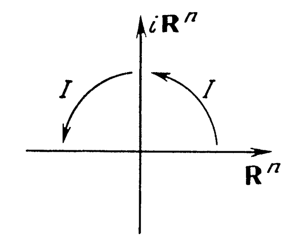


Fig. 117. Opérateur de multiplication par i

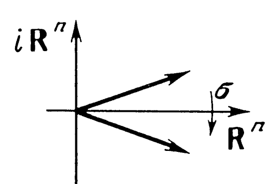


Fig. 118. Conjugaison complexe

EXERCICE 1. Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de $\mathbf{R}^n$, $(e_1, \ldots, e_n, ie_1, \ldots, ie_n)$ une base de $\mathbf{R}^{2n} = {}^{\mathbf{RC}}\mathbf{R}^n$. Trouver la matrice associée à l'opérateur I dans cette base.

Réponse. $(I) = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}$.

Désignons par $\sigma : \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$ (fig. 118) l'opérateur de conjugaison complexe : $\sigma(\xi + i\eta) = \xi - i\eta$. L'action de σ est souvent désignée par une barre au-dessus.

L'opérateur σ coïncide avec l'opérateur unité sur le plan réel et avec l'opérateur unité affecté du signe moins sur le plan imaginaire. C'est un opérateur involutif : $\sigma^2 = E$.

Soit $A : {}^{\mathbf{C}}\mathbf{R}^m \to {}^{\mathbf{C}}\mathbf{R}^n$ un opérateur $\mathbf{C}$-linéaire. On désigne par $\bar{A}$ et on appelle *conjugué complexe de l'opérateur* A l'opérateur défini par la relation

$$\bar{A}z = \overline{(A\bar{z})} \quad \text{pour} \quad \text{tout} \quad z \in {}^{\mathbf{C}}\mathbf{R}^m.$$

EXERCICE 2. Montrer que $\bar{A}$ est un opérateur $\mathbf{C}$-linéaire.

EXERCICE 3. Montrer que la matrice associée à l'opérateur $\bar{A}$ *dans une base réelle* est conjuguée complexe de la matrice associée à l'opérateur A dans la même base.

EXERCICE 4. Montrer que $\overline{A + B} = \bar{A} + \bar{B}$, $\overline{AB} = \bar{A}\bar{B}$, $\overline{\lambda A} = \bar{\lambda}\bar{A}$.

EXERCICE 5. Montrer que l'opérateur linéaire complexe $A : {}^{\mathbf{C}}\mathbf{R}^m \to {}^{\mathbf{C}}\mathbf{R}^n$ est le complexifié d'un opérateur réel si, et seulement si, $\bar{A} = A$.

4. Exponentielle, déterminant et trace d'un opérateur complexe. L'exponentielle, le déterminant et la trace d'un opérateur complexe se définissent exactement de la même manière que pour un opérateur réel. Ils jouissent pratiquement des mêmes propriétés à la seule différence que le déterminant, étant un nombre complexe, ne peut être égal à un volume.

EXERCICE 1. Etablir les propriétés de l'exponentielle :

$$^{\mathbf{R}}(e^A) = e^{^{\mathbf{R}}A}, \quad \overline{e^A} = e^{\bar{A}}, \quad ^{\mathbf{C}}(e^A) = e^{^{\mathbf{C}}A}.$$

EXERCICE 2. Etablir les propriétés du déterminant :

$$\det {}^{\mathbf{R}}A = |\det A|^2, \quad \det \bar{A} = \overline{\det A}, \quad \det {}^{\mathbf{C}}A = \det A.$$

EXERCICE 3. Etablir les propriétés de la trace :

$$\operatorname{tr} {}^{\mathbf{R}}A = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} \bar{A}, \quad \operatorname{tr} \bar{A} = \overline{\operatorname{tr} A}, \quad \operatorname{tr} {}^{\mathbf{C}}A = \operatorname{tr} A.$$

EXERCICE 4. Montrer que dans le cas complexe

$$\det e^A = e^{\operatorname{tr} A}.$$

5. Dérivée d'une courbe à valeurs complexes. Soit $\varphi : I \to \mathbf{C}^n$ une application d'un intervalle I de l'axe réel t dans l'espace vectoriel complexe $\mathbf{C}^n$, que nous appellerons *courbe*.

La dérivée de la courbe φ en un point $t_0 \in I$ se définit comme à l'ordinaire :

$$\left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_{t=t_0} = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(t_0 + h) - \varphi(t_0)}{h}.$$

C'est un vecteur de l'espace $\mathbf{C}^n$.

EXEMPLE. Si $n = 1$, $\varphi(t) = e^{it}$ (fig. 119). Alors $\left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_{t=0} = i$.

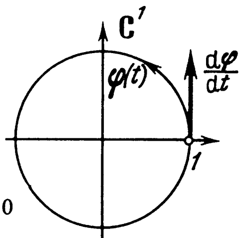


Fig. 119. La dérivée de la courbe $t = e^{it}$ est égale à i au point 0

Examinons plus en détail le cas où $n = 1$. Etant donné que la multiplication est définie dans $\mathbf{C}$, les courbes à valeurs dans $\mathbf{C}$ peuvent être additionnées et multipliées :

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t), \quad (\varphi_1\varphi_2)(t) = \varphi_1(t)\varphi_2(t), \quad t \in I.$$

EXERCICE 1. Etablir les propriétés de la dérivée :

$$\frac{d}{dt}(\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{d\varphi_2}{dt}, \frac{d}{dt}(\varphi_1\varphi_2) = \frac{d\varphi_1}{dt}\varphi_2 + \varphi_1\frac{d\varphi_2}{dt}.$$

En particulier, la dérivée d'un polynôme à coefficients complexes est donnée par la même formule que dans le cas de coefficients réels.

Si $n > 1$, il est impossible d'obtenir le produit de deux courbes à valeurs dans $\mathbf{C}^n$. Cependant, $\mathbf{C}^n$ étant un $\mathbf{C}$-module on peut multiplier la courbe $\varphi : I \to \mathbf{C}^n$ par la fonction $f : I \to \mathbf{C}$:

$$(f\varphi)(t) = f(t)\varphi(t).$$

EXERCICE 2. Etablir les propriétés de la dérivée :

$$\frac{\mathrm{d}(^{\mathbf{R}}\varphi)}{\mathrm{d}t} = \frac{^{\mathbf{R}}\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(^{\mathbf{C}}\varphi) = \frac{^{\mathbf{C}}\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}\bar{\varphi}}{\mathrm{d}t} = \overline{\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}},$$

$$\frac{\mathrm{d}(\varphi_1 + \varphi_2)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}t}, \quad \frac{\mathrm{d}(f\varphi)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\varphi + f\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}.$$

On suppose bien sûr que les dérivées existent.

THÉORÈME. *Soit $A : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ un opérateur $\mathbf{C}$-linéaire. Alors quel que soit $t \in \mathbf{R}$ existe l'opérateur $\mathbf{C}$-linéaire de $\mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{C}^n$*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{tA} = Ae^{tA}.$$

Démonstration. La démonstration se fait exactement de la même manière que pour le cas des réels, mais on peut s'y référer. En réélifiant $\mathbf{C}^n$, on obtient en effet

$$^{\mathbf{R}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{tA}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} {}^{\mathbf{R}}(e^{tA}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{t(^{\mathbf{R}}A)} = (^{\mathbf{R}}A)e^{t(^{\mathbf{R}}A)} = {}^{\mathbf{R}}(Ae^{tA}).$$

§ 19. Equation linéaire dans un espace des phases complexe

Il arrive souvent que le cas complexe est d'un abord plus facile que le cas réel. Le cas complexe est important en soi ; de plus, sa connaissance nous aidera dans l'étude du cas réel.

1. Définition. Soit $A : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ un opérateur $\mathbf{C}$-linéaire. Nous appellerons *équation linéaire* *) dans l'espace des phases $\mathbf{C}^n$ l'équation

$$\dot{z} = Az, \quad z \in \mathbf{C}^n. \tag{1}$$

L'application $\varphi : I \to \mathbf{C}^n$ d'un intervalle I de l'axe réel des t dans $\mathbf{C}^n$ est appelée *solution* de l'équation (1) vérifiant la condition initiale $\varphi(t_0) = z_0$,

*) Cette équation est en fait un système de n équations différentielles linéaires et homogènes du premier ordre à coefficients complexes constants.

$t_0 \in \mathbf{R}$, $z_0 \in \mathbf{C}^n$ si

1) quel que soit $\tau \in I$ $\left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_{t=\tau} = A\varphi(\tau)$;

2) $t_0 \in I$ et $\varphi(t_0) = z_0$.

En d'autres termes, une application $\varphi : I \to \mathbf{C}^n$ est appelée solution de l'équation (1) si après réélification de l'espace $\mathbf{C}^n$ et de l'opérateur A, elle est solution de l'équation

$$\dot{z} = {}^{\mathbf{R}}Az, \quad z \in \mathbf{R}^{2n} = {}^{\mathbf{R}}\mathbf{C}^n,$$

dans un espace des phases réel à $2n$ dimensions.

2. Théorème fondamental. Les théorèmes suivants se démontrent exactement de la même manière que pour le cas réel (voir § 15, 2, 3) :

THÉORÈME. *L'équation* (1) *avec la condition initiale* $\varphi(0) = z_0$ *admet une solution* φ *donnée par la formule* $\varphi(t) = e^{At} z_0$.

THÉORÈME. *Tout groupe à un paramètre* $\{g^t\ (t \in \mathbf{R})\}$ *de transformations* **C**-*linéaires de l'espace* $\mathbf{C}^n$ *est de la forme*

$$g^t = e^{At},$$

où $A : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ *est un opérateur* **C**-*linéaire.*

Notre objectif maintenant est d'étudier et de calculer e^{At} sous une forme explicite.

3. Cas d'un opérateur diagonal. Soit $A : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ un opérateur **C**-linéaire. Considérons l'équation caractéristique

$$\det |A - \lambda E| = 0. \tag{2}$$

THÉORÈME. *Si les n racines* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ *de l'équation caractéristique sont distinctes deux à deux, alors* $\mathbf{C}^n$ *se décompose en une somme directe* $\mathbf{C}^n = \mathbf{C}_1^1 + \dots + \mathbf{C}_n^1$ *de sous-espaces à une dimension invariants par A et* e^{At}, *dans chacun desquels, par exemple dans* $\mathbf{C}_k^1$, e^{At} *se ramène à une multiplication par le nombre complexe* $e^{\lambda_k t}$.

En effet, l'opérateur A possède *) n droites propres linéairement indépendantes :

$$\mathbf{C}^n = \mathbf{C}_1^1 + \dots + \mathbf{C}_n^1.$$

Sur la droite $\mathbf{C}_k^1$ l'opérateur A agit comme une multiplication par λ_k, c'est pourquoi l'opérateur e^{At} agit comme une multiplication par $e^{\lambda_k t}$.

Voyons maintenant plus en détail le cas où $n = 1$.

---

*) C'est le seul endroit où le cas complexe se distingue du réel. La plus grande complexité du cas des réels résulte de ce que le corps **R** n'est pas algébriquement clos.

4. Exemple : une équation linéaire admettant la droite complexe pour espace des phases. Cette équation est de la forme

$$\frac{dz}{dt} = \lambda z, \qquad z \in \mathbf{C}, \qquad \lambda \in \mathbf{C}, \qquad t \in \mathbf{R}. \tag{3}$$

Nous savons déjà qu'elle admet pour solution : $\varphi(t) = e^{\lambda t} z_0$. Examinons la fonction complexe $e^{\lambda t}$ de la variable réelle t :

$$e^{\lambda t} : \mathbf{R} \to \mathbf{C}.$$

Si λ est réel, la fonction $e^{\lambda t}$ est réelle (fig. 120). Dans ce cas le flot de l'équation (3) est une famille d'homothéties de rapport $e^{\lambda t}$. Si λ est un nombre imaginaire pur, il s'écrit $\lambda = i\omega$ et d'après la formule d'Euler on a

$$e^{\lambda t} = e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t.$$

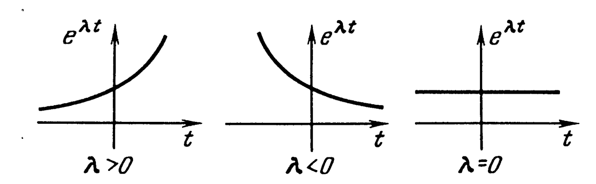
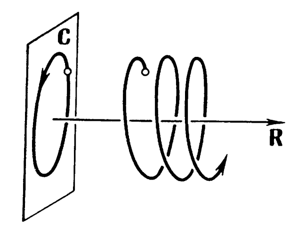


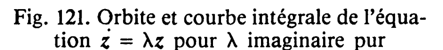
Fig. 120. Graphiques de la fonction $e^{\lambda t}$ pour λ réels

Dans ce cas le flot de l'équation (3) est une famille $\{g^t\}$ de rotations d'angle ωt (fig. 121). Dans le cas général enfin, $\lambda = \alpha + i\omega$ et une multiplication par $e^{\lambda t}$ revient à multiplier $e^{\alpha t}$ par $e^{i\omega t}$ (voir § 15, 5) :

$$e^{\lambda t} = e^{(\alpha + i\omega)t} = e^{\alpha t} \cdot e^{i\omega t}. \tag{4}$$

Par conséquent, la transformation g^t du flot de l'équation (3) est une similitude de rapport $e^{\alpha t}$ et d'angle ωt.




Fig. 121. Orbite et courbe intégrale de l'équation $\dot{z} = \lambda z$ pour λ imaginaire pur

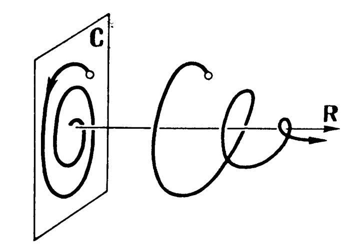


Fig. 122. Orbite et courbe intégrale de l'équation $z = \lambda z$ pour $\lambda = \alpha + i\omega$, $\alpha < 0$, $\omega > 0$

Examinons maintenant les orbites. Supposons par exemple $\alpha < 0$ et $\omega > 0$ (fig. 122). Dans ce cas lorsque t croît, le point $e^{\lambda t} z_0$ tend vers l'ori-

gine des coordonnées en la contournant dans le sens direct (i.e. en se déplaçant de 1 à i).

Dans un système de coordonnées polaires, l'orbite est définie par l'équation

$$r = e^{k\varphi} \quad \left(k = \frac{\alpha}{\omega}\right), \quad \text{ou } \varphi = k^{-1} \ln r.$$

Une telle courbe est appelée *spirale logarithmique*.

En combinant autrement les signes de α et ω les orbites seront également des spirales logarithmiques (fig. 123, 124).

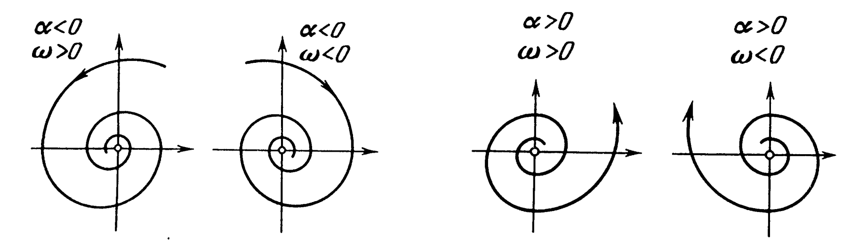


Fig. 123. Foyers stables

Fig. 124. Foyers instables

Dans tous les cas (sauf lorsque $\lambda = 0$) le point $z = 0$ est l'unique point fixe du flot (et l'unique point singulier du champ de vecteurs correspondant à l'équation (3)).

Ce point singulier porte le nom de *foyer* (α et ω étant supposés non nuls). Si $\alpha < 0$, alors $\varphi(t) \to 0$ lorsque $t \to +\infty$ et le foyer est *stable* ; inversement, il est *instable* lorsque $\alpha > 0$.

Lorsque $\alpha = 0$ et $\omega \neq 0$, les orbites sont des cercles admettant pour centre le point singulier (fig. 125).

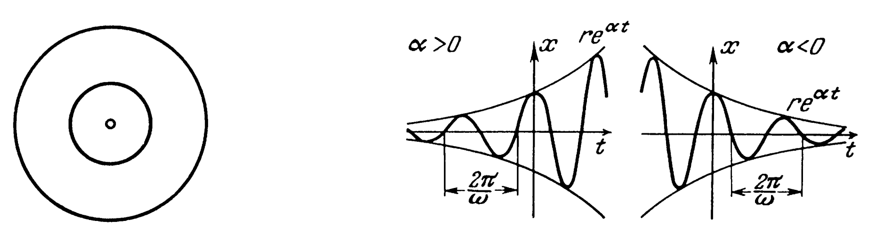


Fig. 125. Centre

Fig. 126. La partie réelle de $e^{\lambda t}$ comme fonction du temps

Choisissons dans $\mathbf{C}^1$ une coordonnée $z = x + iy$ et étudions les variations des parties imaginaire et réelle $x(t)$ et $y(t)$ lorsque le point z est en mouvement. De (4) il vient

$$x(t) = re^{\alpha t} \cos(\varphi + \omega t), \quad y(t) = re^{\alpha t} \sin(\varphi + \omega t),$$

où les constantes r et φ sont définies par la condition initiale (fig. 126). Par conséquent, lorsque $\alpha > 0$, les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ subissent des « oscillations harmoniques de fréquence ω et d'amplitude $re^{\alpha t}$ croissant en raison exponentielle » ; lorsque $\alpha < 0$, ces oscillations sont amorties.

Les variations de x ou de y en fonction du temps peuvent aussi se mettre sous la forme $Ae^{\alpha t} \cos \omega t + Be^{\alpha t} \sin \omega t$, où les constantes A et B sont définies par les conditions initiales.

Remarque 1. En étudiant l'équation (3) de cette façon, nous avons en même temps étudié tous les groupes à un paramètre de transformations **C**-linéaires de la droite complexe.

Remarque 2. Nous avons aussi par la même occasion étudié le système d'équations linéaires sur le plan réel

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \omega y, \\ \dot{y} = \omega x + \alpha y, \end{cases}$$

en lequel se transforme l'équation (3) après réélification.

Des théorèmes des points 2 et 3 et des calculs du point 4 découle immédiatement une formule explicite pour les solutions de l'équation (1).

5. Corollaire. *Supposons que les n racines* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *de l'équation caractéristique* (2) *soient distinctes deux à deux. Alors toute solution* φ *de l'équation* (1) *est de la forme*

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\lambda_k t} \xi_k, \tag{5}$$

où ξ_k *sont des vecteurs constants ne dépendant pas des conditions initiales et* c_k *des constantes complexes dépendant des conditions initiales. La formule* (5) *fournit la solution de l'équation* (1) *quel que soit le choix de ces constantes.*

Si $z_1, \ldots, z_n$ est un système linéaire de coordonnées sur $\mathbf{C}^n$, la partie réelle (ou imaginaire) de chaque coordonnée $z_l = x_l + iy_l$ variera avec le temps comme une combinaison linéaire des fonctions $e^{\alpha_k t} \cos \omega_k t$ et $e^{\alpha_k t} \sin \omega_k t$:

$$x_l = \sum_{k=1}^{n} r_{k,l} e^{\alpha_k t} \cos (\varphi_{k,l} + \omega_k t) = \sum_{k=1}^{n} A_{k,l} e^{\alpha_k t} \cos \omega_k t + B_{k,l} e^{\alpha_k t} \sin \omega_k t, \tag{6}$$

où $\lambda_k = \alpha_k + i\omega_k$, et r, φ, A, B sont des constantes réelles dépendant des conditions initiales.

Pour la démonstration il suffit de développer la condition initiale par rapport à la base propre : $\varphi(0) = c_1 \xi_1 + \ldots + c_n \xi_n$.

§ 20. Complexification de l'équation linéaire réelle

Appliquons au cas réel les conclusions tirées de l'étude de l'équation complexe.

1. L'équation complexifiée. Soit $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ un opérateur linéaire définissant l'équation linéaire

$$\dot{x} = Ax, \qquad x \in \mathbf{R}^n. \tag{1}$$

La complexifiée de l'équation (1) est l'équation

$$\dot{z} = {}^{\mathbf{C}}Az, z \in \mathbf{C}^n = {}^{\mathbf{C}}\mathbf{R}^n \tag{2}$$

définie dans un espace des phases complexe.

LEMME 1. *L'équation* (2) *avec des conditions initiales conjuguées complexes admet des solutions conjuguées complexes.*

Démonstration. Soit φ la solution vérifiant la condition initiale $\varphi(t_0) = z_0$ (fig. 127). Alors $\overline{\varphi}(t_0) = \overline{z}_0$. Montrons que $\overline{\varphi}$ est également solution. Le lemme sera alors démontré en raison de l'unicité.

Quel que soit t on a

$$\frac{\mathrm{d}\overline{\varphi}}{\mathrm{d}t} = \overline{\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}} = \overline{{}^{\mathbf{C}}A\varphi} = \overline{{}^{\mathbf{C}}A}\,\overline{\varphi} = {}^{\mathbf{C}}A\overline{\varphi}.$$

C.Q.F.D.

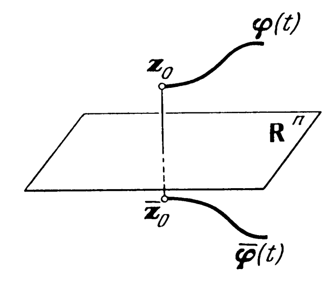


Fig. 127. Solutions conjuguées complexes

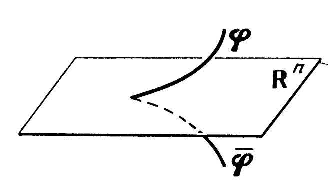


Fig. 128. La solution vérifiant une condition initiale réelle ne peut prendre des valeurs complexes

REMARQUE. Au lieu de l'équation (2) on aurait pu envisager une équation de forme plus générale

$$\dot{z} = F(z, t), \qquad z \in {}^{\mathbf{C}}\mathbf{R}^n,$$

dont le deuxième membre prend des valeurs conjuguées complexes dans des points conjugués complexes :

$$F(\overline{z}, t) = \overline{F(z, t)}.$$

Cette condition est remplie, par exemple, par tout polynôme en les

composantes z_k du vecteur z par rapport à une base réelle et dont les coefficients sont des fonctions réelles de t.

COROLLAIRE. *L'équation* (2) *avec une condition initiale réelle admet une solution réelle vérifiant également l'équation* (1).

En effet, si $\overline{\varphi} \neq \varphi$ (fig. 128), on obtiendrait une contradiction avec le théorème d'unicité.

Dans le lemme suivant la linéarité de l'équation est essentielle.

LEMME 2. *Une fonction* $z = \varphi(t)$ *est solution de l'équation complexifiée* (2) *si, et seulement si, sa partie réelle et sa partie imaginaire vérifient l'équation réelle* (1).

En effet,

$$^{\mathbf{C}}A(x + iy) = Ax + iAy,$$

c'est pourquoi la réélifiée de l'équation (2) se décompose en un produit direct :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, & x \in \mathbf{R}^n, \\ \dot{y} = Ay, & y \in \mathbf{R}^n. \end{cases}$$

Des lemmes 1 et 2 on voit que si on connaît les solutions complexes de l'équation (2), on peut trouver les solutions réelles de l'équation (1) et inversement. En particulier, *les formules* (6) du point 5, § 19 *donnent sous une forme explicite les solutions dans le cas de racines non multiples de l'équation caractéristique.*

2. Sous-espaces invariants d'un opérateur réel. Soit $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ et soit λ une racine quelconque, en général complexe, de l'équation caractéristique det $|A - \lambda E| = 0$. Il est évident que

LEMME 3. *Si* $\xi \in \mathbf{C}^n = {}^{\mathbf{C}}\mathbf{R}^n$ *est le vecteur propre de l'opérateur* $^{\mathbf{C}}A$ *associé à la valeur propre* λ, *alors* $\overline{\xi}$ *est le vecteur propre associé à la valeur propre* $\overline{\lambda}$. *Les valeurs propres* λ *et* $\overline{\lambda}$ *ont même multiplicité.*

En effet, puisque $\overline{^{\mathbf{C}}A} = {}^{\mathbf{C}}A$, l'équation $^{\mathbf{C}}A\xi = \lambda\xi$ est équivalente à $^{\mathbf{C}}A\overline{\xi} = \overline{\lambda}\overline{\xi}$ et l'équation caractéristique possède des coefficients réels.

Supposons maintenant que les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{C}$ *de l'opérateur* $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ *sont distinctes deux à deux* (fig. 129). Parmi elles, il existe un certain nombre ν de valeurs propres réelles et un certain nombre μ de couples conjugués complexes (tels que $\nu + 2\mu = n$, de sorte que la parité

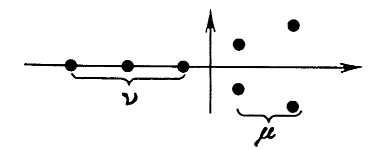


Fig. 129. Valeurs propres d'un opérateur réel

du nombre de valeurs propres réelles est égale à la parité de n). On démontre sans peine le

THÉORÈME. *L'espace* $\mathbf{R}^n$ *se décompose en une somme directe de* ν *sous-espaces à une dimension invariants par* A *et de* μ *sous-espaces à deux dimensions invariants par* A.

En effet, à chaque valeur propre réelle est associé un vecteur propre réel et par conséquent un sous-espace à une dimension invariant dans $\mathbf{R}^n$.

Soit λ, $\bar{\lambda}$ un couple quelconque de valeurs propres conjuguées complexes. A la valeur propre λ est associé un vecteur propre $\xi \in \mathbf{C}^n = {}^{\mathbf{C}}\mathbf{R}^n$ de l'opérateur complexifié ${}^{\mathbf{C}}A$.

D'après le lemme 3 le vecteur conjugué $\bar{\xi}$ est également un vecteur propre associé à la valeur propre $\bar{\lambda}$.

Le plan complexe $\mathbf{C}^2$ engendré par les vecteurs propres ξ, $\bar{\xi}$ est invariant par l'opérateur ${}^{\mathbf{C}}A$. Le sous-espace réel $\mathbf{R}^n \subset {}^{\mathbf{C}}\mathbf{R}^n$ est également invariant. Leur intersection est donc invariante par ${}^{\mathbf{C}}A$. Montrons que cette intersection est le plan réel $\mathbf{R}^2$ (fig. 130).

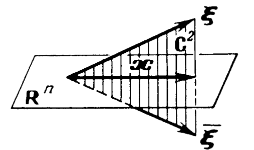


Fig. 130. La partie réelle d'un vecteur propre complexe est située sur un plan réel invariant

Considérons, en effet, les parties réelle et imaginaire du vecteur propre ξ :

$$x = \frac{1}{2}(\xi + \bar{\xi}) \in \mathbf{R}^n, \quad y = \frac{1}{2i}(\xi - \bar{\xi}) \in \mathbf{R}^n.$$

Les vecteurs x et y, étant une combinaison $\mathbf{C}$-linéaire des vecteurs ξ et $\bar{\xi}$, appartiennent à l'intersection $\mathbf{C}^2 \cap \mathbf{R}^n$. Les vecteurs x et y sont $\mathbf{C}$-linéairement indépendants, car les vecteurs $\mathbf{C}$-indépendants ξ et $\bar{\xi}$ sont leur combinaison linéaire :

$$\xi = x + iy, \quad \bar{\xi} = x - iy.$$

Donc, tout vecteur du plan $\mathbf{C}^2$ se représente d'une seule façon par une combinaison linéaire complexe des vecteurs réels x et y :

$$\eta = ax + by, \quad a \in \mathbf{C}, \quad b \in \mathbf{C}.$$

Un tel vecteur est réel ($\eta = \bar{\eta}$) si, et seulement si, $\bar{a}x + \bar{b}y = ax + by$, i.e. si a et b son réels. Donc, *l'intersection* $\mathbf{C}^2 \cap \mathbf{R}^n$ *est le plan réel* $\mathbf{R}^2$ *engendré par les vecteurs* x *et* y*, respectivement parties réelle et imaginaire du vecteur propre* ξ.

λ et $\bar{\lambda}$ sont les valeurs propres de la restriction de l'opérateur A au plan $\mathbf{R}^2$.

En effet, la complexification ne change pas les valeurs propres. Après complexification de la restriction de A à $\mathbf{R}^2$ nous obtenons une restriction de ${}^{\mathbf{C}}A$ à $\mathbf{C}^2$. Or le plan $\mathbf{C}^2$ est engendré par les vecteurs propres de l'opérateur ${}^{\mathbf{C}}A$ associés aux valeurs propres $\lambda, \bar{\lambda}$. Donc les valeurs propres de $A \mid \mathbf{R}^2$ sont λ et $\bar{\lambda}$.

Il nous reste à montrer que les sous-espaces à une et à deux dimensions invariants de $\mathbf{R}^n$ sont $\mathbf{R}$-linéairement indépendants. Ceci est immédiat puisque les n vecteurs propres de l'opérateur ${}^{\mathbf{C}}A$ sont $\mathbf{C}$-linéairement indépendants et s'écrivent comme une combinaison linéaire des vecteurs ξ_k $(k = 1, \dots, \nu)$ et x_k, y_k $(k = 1, \dots, \mu)$.

Le théorème est démontré.

Par conséquent, *si toutes les valeurs propres de l'opérateur* $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ *sont simples, l'équation différentielle linéaire*

$$\dot{x} = Ax, x \in \mathbf{R}^n,$$

se décompose en un produit direct d'équations dont les espaces des phases sont à une et à deux dimensions.

Remarquons que le polynôme de forme générale ne possède pas de racines multiples. Ainsi pour étudier des équations différentielles linéaires il est nécessaire de les étudier d'abord sur la droite (comme nous l'avons vu) et sur le plan.

3. Equations linéaires sur le plan.

THÉORÈME. *Soit* $A : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ *un opérateur linéaire dont les valeurs propres* λ *et* $\bar{\lambda}$ *ne sont pas réelles.*

Alors A *est le réélifié de l'opérateur* $\Lambda : \mathbf{C}^1 \to \mathbf{C}^1$ *de multiplication par le nombre complexe* λ.

D'une façon plus précise, le plan $\mathbf{R}^2$ peut être muni d'une structure de droite complexe $\mathbf{C}^1$, de sorte que $\mathbf{R}^2 = {}^{\mathbf{R}}\mathbf{C}^1$ et $A = {}^{\mathbf{R}}\Lambda$.

Démonstration par des calculs *) assez mystérieux. Soit $x + iy \in {}^{\mathbf{C}}\mathbf{R}^2$ le vecteur propre complexe de l'opérateur ${}^{\mathbf{C}}A$ associé à la valeur propre $\lambda = \alpha + i\omega$. Les vecteurs x et y forment une base dans $\mathbf{R}^2$. D'un côté nous avons

---

*) On peut remplacer ces calculs par le raisonnement suivant. Soit $\lambda = \alpha + i\omega$. Définissons l'opérateur $I : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ par la condition $A = \alpha E + \omega I$. Cet opérateur existe puisque $\omega \neq 0$ par hypothèse. Alors $I^2 = -E$, car l'opérateur A vérifie sa propre équation caractéristique. En prenant I pour multiplication par i nous obtenons la structure complexe cherchée sur $\mathbf{R}^2$.

avons

$$^{\mathbf{C}}A(x + iy) = (\alpha + i\omega)(x + iy) = \alpha x - \omega y + i(\omega x + \alpha y)$$

et de l'autre

$$^{\mathbf{C}}A(x + iy) = Ax + iAy,$$

d'où

$$Ax = \alpha x - \omega y, \ Ay = \omega x + \alpha y,$$

i.e. par rapport à la base x, y l'opérateur $A : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ est associé à la même matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}$$

que l'opérateur $^{\mathbf{R}}\Lambda$ de multiplication par $\lambda = \alpha + i\omega$ par rapport à la base $1, -i$. Donc, si l'on prend x égal à 1 et y à $-i$, on obtient la structure complexe cherchée sur $\mathbf{R}^2$.

COROLLAIRE 1. *Soit $A : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ une transformation linéaire du plan euclidien à valeurs propres λ, $\bar{\lambda}$ non réelles. Alors la transformation A est affinement équivalente à une similitude de rapport* $|\lambda|$ *et d'angle* Arg λ.

COROLLAIRE 2. *Sur le plan euclidien* $\mathbf{R}^2$ *le flot de l'équation linéaire* (1) *à valeurs propres non réelles $\lambda, \bar{\lambda} = \alpha \pm i\omega$ est affinement équivalent à une famille de similitudes de rapport $e^{\alpha t}$ et d'angle ωt.*

En particulier, le point singulier 0 est un foyer, quant aux orbites, elles sont les images affines de spirales logarithmiques qui, pour $t \to +\infty$, se rapprochent de l'origine des coordonnées si la partie réelle α des valeurs propres $\lambda, \bar{\lambda}$ est <0 et s'en éloignent si $\alpha > 0$ (fig. 131).

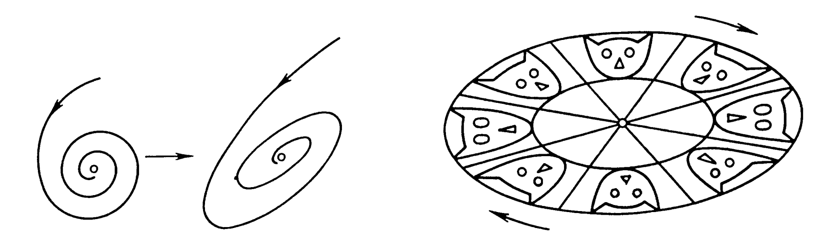


Fig. 131. Image affine d'une spirale logarithmique

Fig. 132. Rotation elliptique

Lorsque $\alpha = 0$ (fig. 132), les orbites sont représentées par une famille d'ellipses concentriques admettant ce point singulier pour *centre*. Dans ce cas les transformations du flot sont appelées *rotations elliptiques*.

4. Classification des points singuliers sur le plan. Soit une équation linéaire arbitraire sur le plan

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbf{R}^2, A : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2.$$

Supposons que les racines λ_1, λ_2 de l'équation caractéristique soient distinctes. Si elles sont réelles et $\lambda_1 < \lambda_2$, cette équation se décompose en deux équations à une dimension et nous obtenons l'un des cas déjà étudiés au chapitre 1 (fig. 133, 134, 135).

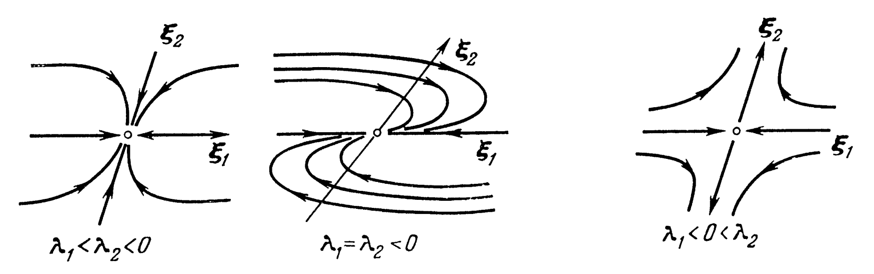


Fig. 133. Nœuds stables

Fig. 134. Col

Nous avons omis les cas où λ_1 ou λ_2 sont nuls. Ceux-ci offrent en effet bien moins d'intérêt en raison, d'abord, de leur rareté et, ensuite, parce qu'ils ne se conservent pas par une perturbation aussi petite que l'on veut. Leur étude ne présente aucune difficulté.

Si les racines sont complexes ($\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\omega$), selon le signe de α on peut retrouver l'un des cas représentés fig. 136, 137, 138.

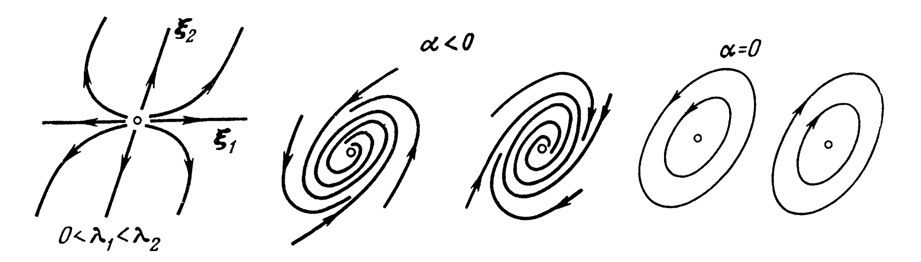


Fig. 135. Nœud instable

Fig. 136. Foyers stables

Fig. 137. Centres

Le cas où le point singulier est un centre est exceptionnel, mais on le rencontre par exemple dans les systèmes conservatifs (voir § 12). Les cas de racines multiples sont également exceptionnels. Le lecteur est invité à vérifier qu'un bloc de Jordan correspond bien au cas représenté sur la fig. 133 ($\lambda_1 = \lambda_2 < 0$; i.e. un nœud dégénéré).

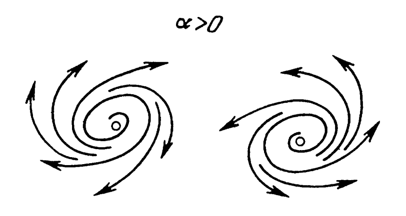


Fig. 138. Foyers instables

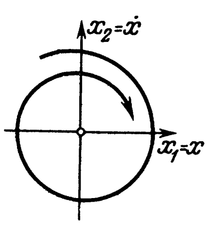


Fig. 139. Plan de phase du pendule en présence de faible frottement

5. Exemple : pendule avec frottement. Appliquons ce qui a été dit plus haut à l'équation des petites oscillations du pendule avec frottement $\ddot{x} = -x - k\dot{x}$ (k est le coefficient de frottement). Ecrivons le système équivalent :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - kx_2. \end{cases}$$

Etudions l'équation caractéristique. La matrice du système

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -k \end{pmatrix}$$

a pour déterminant 1 et pour trace $-k$. Les racines de l'équation caractéristique $\lambda^2 + k\lambda + 1 = 0$ sont complexes lorsque $|k| < 2$, i.e. lorsque le frottement n'est pas très intense *).

La partie réelle de chacune des racines complexes

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\omega$$

est égale à $-k/2$. En d'autres termes, *si le coefficient de frottement n'est pas très grand* ($0 < k < 2$), *la position inférieure d'équilibre du pendule* ($x_1 = x_2 = 0$) *est un foyer stable.*

Lorsque $k \to 0$, le foyer se transforme en centre ; plus le coefficient de frottement sera petit, plus lentement le point représentatif se rapprochera de la position d'équilibre lorsque $t \to +\infty$ (fig. 139). Les formules explicites des variations de $x_1 = x$ par rapport au temps se déduisent du corollaire 2, point 3 et des formules du point 4, § 19 :

$$x(t) = re^{\alpha t} \cos(\varphi - \omega t) = Ae^{\alpha t} \cos \omega t + Be^{\alpha t} \sin \omega t,$$

où les coefficients r et φ (ou A et B) sont définis à partir des conditions initiales.

*) Le cas de racines réelles a été examiné au § 17, point 2.

Les oscillations du pendule seront donc amorties, d'amplitude variable $re^{\alpha t}$ et de période $\frac{2\pi}{\omega}$. Plus le coefficient de frottement sera élevé, plus rapidement diminuera l'amplitude *). La fréquence $\omega = \sqrt{1 - \frac{k^2}{4}}$ diminue lorsque le coefficient de frottement k croît. Lorsque $k \to 2$, la fréquence tend vers 0 et la période vers ∞ (fig. 140). Lorsque k est petit, $\omega \approx 1 - \frac{k^2}{8}$ $(k \to 0)$, de sorte que le frottement augmente de très peu la période, et l'effet qu'il exerce sur la fréquence est tel qu'on le néglige dans la plupart des applications.

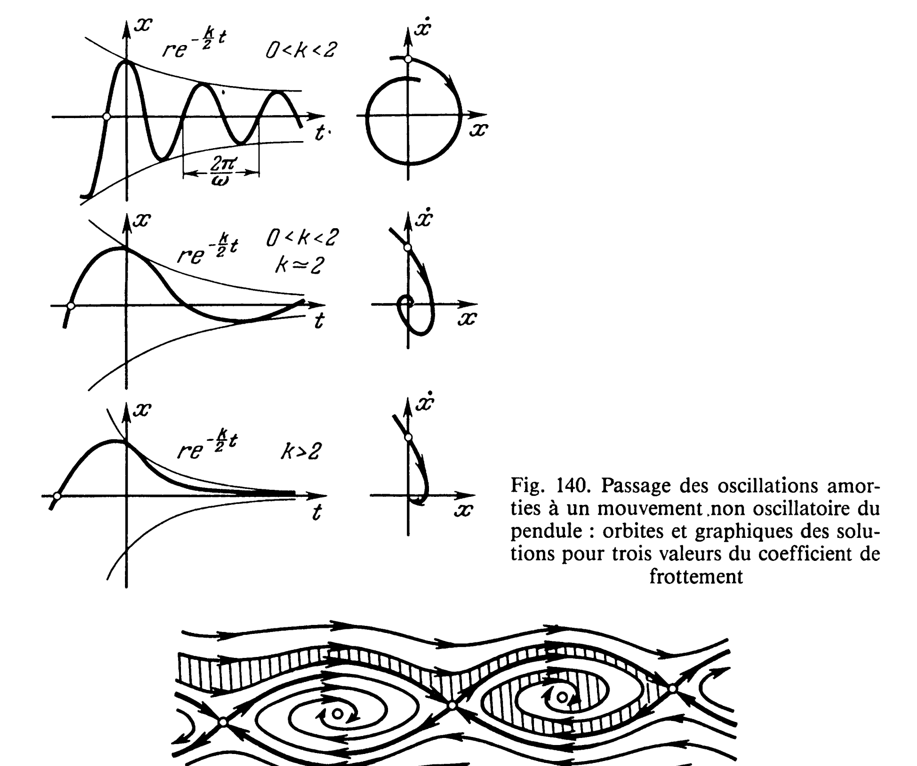


Fig. 140. Passage des oscillations amorties à un mouvement non oscillatoire du pendule : orbites et graphiques des solutions pour trois valeurs du coefficient de frottement

Fig. 141. Après un certain nombre de tours le pendule commence à osciller à proximité de sa position inférieure d'équilibre

*) Et pourtant pour toute valeur de $k < 2$ le pendule effectue une infinité d'oscillations. Si $k > 2$, le pendule change le sens de son mouvement au plus une fois.

EXERCICE. Construire les orbites du pendule non linéarisé avec frottement régi par l'équation $\ddot{x} = -\sin x - k\dot{x}$ (fig. 141).

Nota. Calculer la dérivée de l'énergie totale le long d'une orbite.

6. Solution générale de l'équation linéaire dans le cas de racines simples de l'équation caractéristique. Nous savons déjà que toute solution φ de l'équation complexifiée est une combinaison linéaire d'exponentielles (voir § 19, 5) :

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\lambda_k t} \xi_k,$$

où ξ_k est un vecteur propre arbitraire associé à la valeur propre λ_k. *Choisissons réels les vecteurs propres associés à des valeurs propres réelles, et complexes conjugués, les vecteurs propres associés à des valeurs propres complexes conjuguées.*

Nous savons déjà que les solutions de l'équation réelle sont solutions de sa complexifiée avec des conditions initiales réelles. Pour que le vecteur $\varphi(0)$ soit réel il faut et il suffit que

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \xi_k = \sum_{k=1}^{n} \bar{c}_k \bar{\xi}_k.$$

Pour cela *les coefficients des vecteurs conjugués complexes doivent être conjugués complexes et ceux des vecteurs réels doivent être réels.*

Remarquons que les n constantes complexes c_k (pour un choix fixe des vecteurs propres) sont définies d'une manière unique par la solution de l'équation complexe. Ainsi nous venons de démontrer le

THÉORÈME. *Toute solution de l'équation réelle s'écrit d'une manière unique (pour un choix fixe des vecteurs propres) sous la forme*

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\nu} a_k e^{\lambda_k t} \xi_k + \sum_{k=\nu+1}^{\nu+\mu} c_k e^{\lambda_k t} \xi_k + \bar{c}_k e^{\bar{\lambda}_k t} \bar{\xi}_k, \tag{1}$$

où a_k et c_k sont des constantes respectivement réelles et complexes.

La formule (1) est appelée *solution générale* de l'équation. On peut également l'écrire sous la forme

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\nu} a_k e^{\lambda_k t} \xi_k + 2\mathrm{Re} \sum_{k=\nu+1}^{\nu+\mu} c_k e^{\lambda_k t} \xi_k.$$

Remarquons que la solution générale dépend de $\nu + 2\mu = n$ constantes réelles a_k, $\mathrm{Re}\, c_k$, $\mathrm{Im}\, c_k$. Ces constantes sont définies de façon unique par les conditions initiales.

COROLLAIRE 1. *Soit* $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ *une solution d'un système de* n *équations différentielles du premier ordre, linéaires et réelles, associé à une matrice* A. *Supposons simples toutes les racines de l'équation caractéristique de la matrice* A. *Alors toute fonction* φ_m *est une combinaison linéaire des fonctions* $e^{\lambda_k t}$ *et* $e^{\alpha_k t}\cos\omega_k t$, $e^{\alpha_k t}\sin\omega_k t$, *où* λ_k *et* $\alpha_k \pm i\omega_k$ *sont les racines respectivement réelles et complexes de l'équation caractéristique.*

Démonstration. Développons la solution générale (1) $\boldsymbol{\varphi} = \varphi_1 \boldsymbol{e}_1 + \dots + \varphi_n \boldsymbol{e}_n$. Or $e^{(\alpha_k \pm i\omega_k)t} = e^{\alpha_k t}(\cos\omega_k t \pm i\sin\omega_k t)$, c.q.f.d.

Dans la résolution pratique des systèmes linéaires, on peut, une fois les valeurs propres connues, chercher les solutions sous forme de combinaison linéaire des fonctions $e^{\lambda_k t}$, $e^{\alpha_k t}\cos\omega_k t$ et $e^{\alpha_k t}\sin\omega_k t$ par la méthode des coefficients indéterminés.

COROLLAIRE 2. *Soit* A *une matrice carrée réelle dont les valeurs propres sont simples. Tout élément de la matrice* e^{At} *est alors une combinaison linéaire des fonctions* $e^{\lambda_k t}$, $e^{\alpha_k t}\cos\omega_k t$ *et* $e^{\alpha_k t}\sin\omega_k t$, *où* λ_k *et* $\alpha_k \pm i\omega_k$ *sont des racines respectivement réelles et complexes de l'équation caractéristique.*

Démonstration. Chaque colonne de la matrice e^{At} est constituée par les coordonnées de l'image d'un vecteur de base par le flot du système d'équations différentielles associé à la matrice A.

REMARQUE. Tout ce qui précède s'applique immédiatement aux équations et systèmes d'équations d'ordre supérieur à 1, car les unes comme les autres se ramènent à des systèmes du premier ordre (voir § 9).

EXERCICE. Trouver les solutions réelles des équations

$$x^{\mathrm{IV}} + 4x = 0, \quad x^{\mathrm{IV}} = x, \quad \dddot{x} + x = 0.$$

§ 21. Classification des points singuliers des systèmes linéaires

Nous avons vu plus haut que dans le cas général (lorsque l'équation caractéristique ne possède pas de racines multiples) le système linéaire réel se décompose en un produit direct de systèmes à une et à deux dimensions. Ces systèmes ayant déjà été étudiés nous pouvons passer à l'étude des systèmes à plusieurs dimensions.

1. Exemple : points singuliers dans un espace à trois dimensions. L'équation caractéristique est une équation cubique réelle qui peut avoir soit trois racines réelles, soit une racine réelle et deux complexes. Plusieurs cas peuvent se présenter selon la disposition de ces trois racines λ_1, λ_2, λ_3 sur le plan de la variable complexe λ. Examinons l'ordre et les signes des parties réelles. Sont possibles 10 cas « génériques » (fig. 142) et de nom-

breux cas « dégénérés » (voir, par exemple, fig. 143) lorsque la partie réelle de l'une des racines est nulle ou égale à la partie réelle d'une racine qui n'est pas sa conjuguée complexe (nous n'allons pas étudier ici les cas de racines multiples). Dans chaque cas l'examen de l'allure des orbites ne présente aucune difficulté.

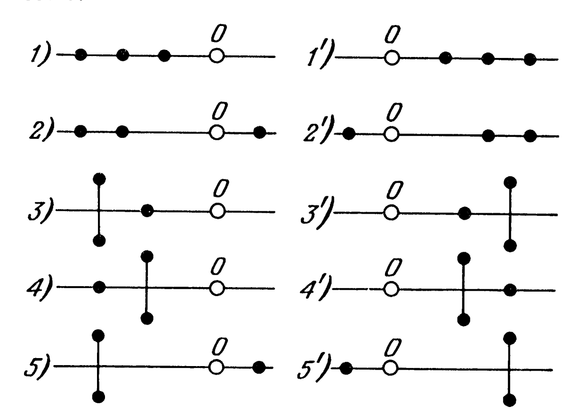


Fig. 142. Valeurs propres de l'opérateur réel $A : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$. Cas génériques

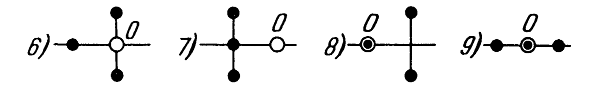


Fig. 143. Quelques cas dégénérés

Etant donné que $e^{\lambda t}(\operatorname{Re} \lambda < 0)$ tend vers 0 lorsque $t \to +\infty$ et ce d'autant plus vite que Re λ est petit, nous obtenons les orbites représentées sur les figures 144 à 148 :

$$\varphi(t) = \operatorname{Re}\,(c_1 e^{\lambda_1 t} \xi_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \xi_2 + c_3 e^{\lambda_3 t} \xi_3).$$

Les cas 1′) à 5′) se déduisent des cas 1) à 5) par un changement de l'orientation de l'axe t, de sorte que sur les figures 144 à 148 il faut orienter toutes les flèches dans le sens inverse.

Exercice. Représenter les orbites correspondant aux cas 6), 7), 8), 9) de la figure 143.

2. Equivalence linéaire, différentiable et topologique. Toute classification se fonde sur une relation d'équivalence. Il existe pour le moins trois relations d'équivalence valables pour les systèmes linéaires ; elles correspondent à un point de vue algébrique, différentiable et topologique.

Soient $\{f^t\}$, $\{g^t\} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ des flots.

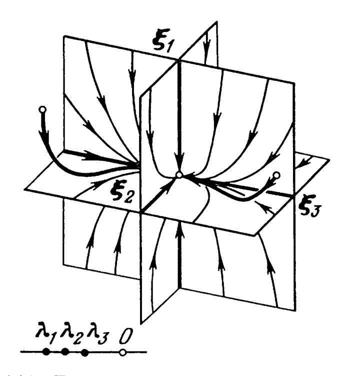


Fig. 144. Espace des phases de l'équation linéaire pour $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0$. Le flot est une contraction dans les trois directions

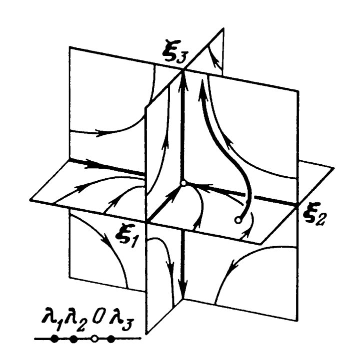


Fig. 145. $\lambda_1 < \lambda_2 < 0 < \lambda_3$. Contraction dans deux directions, dilatation dans la troisième

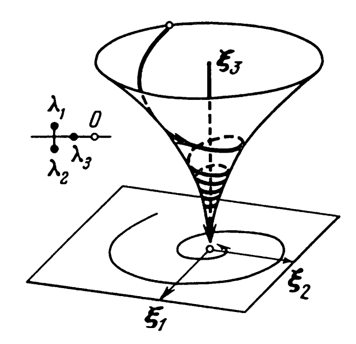


Fig. 146. Re $\lambda_{1,2} < \lambda_3 < 0$. Contraction dans la direction de ξ_3, rotation suivie d'une contraction plus rapide dans le plan (ξ_1, ξ_2)

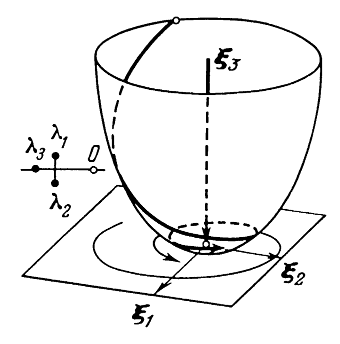


Fig. 147. $\lambda_3 <$ Re $\lambda_{1,2} < 0$. Contraction dans la direction de ξ_3, rotation suivie d'une contraction plus lente dans le plan (ξ_1, ξ_2)

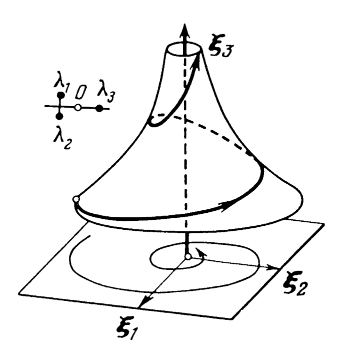


Fig. 148. Re $\lambda_{1,2} < 0 < \lambda_3$. Contraction dans la direction de ξ_3, rotation suivie d'une contraction dans le plan (ξ_1, ξ_2)

DÉFINITION. Les flots $\{f^t\}$ et $\{g^t\}$ sont ***équivalents*** *) s'il existe une application bijective $h : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ qui transforme le flot $\{f^t\}$ en le flot $\{g^t\}$ de telle sorte que $h \circ f^t = g^t \circ h$ quel que soit $t \in \mathbf{R}$ (fig. 149). Ce qui revient à dire que le flot $\{f^t\}$ se transforme en $\{g^t\}$ par le changement de coordonnées h.

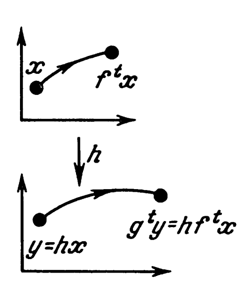


Fig. 149. Flots équivalents

Ces flots sont dits :

1) *linéairement équivalents* si l'application $h : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ est un *isomorphisme linéaire, $h \in GL(\mathbf{R}^n)$* ;

2) *différentiablement équivalents* si l'application $h : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ est un *difféomorphisme* ;

3) *topologiquement équivalents* si l'application $h : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ est un *homéomorphisme*, i.e. est bijective et bicontinue.

EXERCICE 1. Montrer que l'équivalence linéaire entraîne l'équivalence différentiable et que l'équivalence différentiable entraîne l'équivalence topologique.

Remarquons que l'application h associe aux orbites du flot $\{f^t\}$ celles du flot $\{g^t\}$.

EXERCICE 2. Tout automorphisme linéaire $h \in GL(\mathbf{R}^n)$ transformant les orbites du flot $\{f^t\}$ en les orbites du flot $\{g^t\}$ réalise-t-il l'équivalence linéaire de ces flots ?

Réponse. Non.

Nota. Prendre $n = 1, f^t x = e^t x, g^t x = e^{2t} x$.

EXERCICE 3. Montrer que les relations d'équivalence linéaire, différentiable et topologique sont de véritables relations d'équivalence, i.e.

$$f \sim f, \quad (f \sim g) \Rightarrow (g \sim f), \quad (f \sim g, g \sim k) \Rightarrow (f \sim k).$$

En particulier, tout ce qui a été dit s'applique aux flots des systèmes linéaires. Pour abréger, nous parlerons de l'équivalence de ces systèmes mêmes.

Ainsi donc, nous avons divisé de trois façons tous les systèmes linéaires en classes d'équivalence (linéaire, différentiable et topologique). Examinons ces classes plus en détail.

---

*) La relation d'équivalence ainsi définie est appelée également *similitude*.

3. Classification linéaire.

THÉORÈME. *Soient A et B deux opérateurs linéaires dans $\mathbf{R}^n$ dont les valeurs propres sont simples. Alors les systèmes*

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad et \quad \dot{y} = By, \quad y \in \mathbf{R}^n,$$

sont linéairement équivalents si, et seulement si, les valeurs propres des opérateurs A et B sont les mêmes.

Démonstration. Pour que des systèmes linéaires soient linéairement équivalents il faut et il suffit que $B = hAh^{-1}$ pour un certain $h \in GL(\mathbf{R}^n)$ (fig. 150) (car $\dot{y} = h\dot{x} = hAx = hAh^{-1}y$). Les valeurs propres des opérateurs A et hAh^{-1} sont les mêmes. (Il n'est pas essentiel que les valeurs propres soient simples ici.)

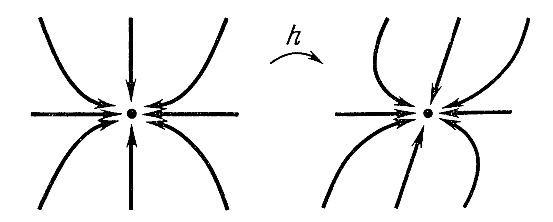


Fig. 150. Systèmes linéairement équivalents

Inversement, supposons que les valeurs propres de l'opérateur A soient simples et coïncident avec celles de l'opérateur B. Alors A et B se décomposent en produits directs de systèmes à une et à deux dimensions identiques (linéairement équivalents) en vertu du § 20 ; aussi sont-ils linéairement équivalents.

EXERCICE. Montrer que les systèmes

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1, \\ \dot{x}_2 = x_2 ; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_2 \end{cases}$$

ne sont pas linéairement équivalents quoique leurs valeurs propres soient les mêmes.

4. Classification différentiable.

On a de toute évidence le

THÉORÈME. *Deux systèmes linéaires*

$$\dot{x} = Ax, \quad \dot{x} = Bx, \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

sont différentiablement équivalents si, et seulement si, ils sont linéairement équivalents *).

---

*) Il faut toutefois se garder de penser que tout difféomorphisme qui établit leur équivalence est linéaire. Exemple : $A = B = 0$.

Démonstration. Soit $h : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ un difféomorphisme appliquant le flot du système A sur le flot du système B. Le point $x = 0$ est un point fixe pour le flot du système A. Donc h associe à 0 l'un des points fixes c du flot du système B, de sorte que $Bc = 0$. Le difféomorphisme de translation $d : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ ($dx = x - c$) applique le flot B sur lui-même ($(x - c)^\cdot = \dot{x} = Bx = B(x - c)$). Le difféomorphisme

$$h_1 = d \circ h : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$$

transforme le flot A en le flot B et laisse fixe le point 0, i.e. $h_1(0) = 0$.

Désignons par $H : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ la dérivée en 0 du difféomorphisme h_1, $H = h_1 |_0 \in GL(\mathbf{R}^n)$. Les difféomorphismes $h_1 \circ e^{At} = e^{Bt} \circ h_1$ coïncident quel que soit t. C'est pourquoi, quel que soit t leurs dérivées coïncident lorsque $x = 0$. On a

$$He^{At} = e^{Bt} H.$$

C.Q.F.D.

§ 22. Classification topologique des points singuliers

Soient deux systèmes linéaires

$$\dot{x} = Ax, \quad \dot{x} = Bx, \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

dont nous supposerons non nulles les parties réelles de toutes leurs valeurs propres. Désignons par m_- le nombre de valeurs propres à partie réelle <0 et par m_+ le nombre de valeurs propres à partie réelle >0, i.e. $m_- + m_+ = n$.

1. Théorème. *Pour que soient topologiquement équivalents deux systèmes linéaires dont la partie réelle de toute valeur propre est non nulle, il faut et il suffit que le nombre de valeurs propres à partie réelle* <0 (*resp.* >0) *soit le même dans les deux systèmes* :

$$m_-(A) = m_-(B), \quad m_+(A) = m_+(B).$$

Ce théorème affirme par exemple que les nœuds et foyers stables (fig. 151) sont topologiquement équivalents entre eux ($m_- = 2$), mais, par contre, ne sont pas équivalents au col ($m_- = m_+ = 1$).

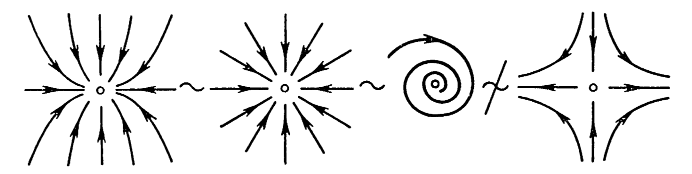


Fig. 151. Systèmes topologiquement équivalents et non équivalents

Tout comme l'indice d'inertie d'une forme quadratique non dégénérée, le nombre m_- est le seul invariant topologique du système.

Remarque. Une proposition analogue est vraie *localement* (au voisinage d'un point fixe) pour les systèmes *non linéaires* dont les valeurs propres des parties linéaires ne sont pas imaginaires pures. En particulier, un tel système est topologiquement équivalent à sa partie linéaire (fig. 152) au voisinage d'un point fixe. Nous glisserons sur la démonstration de cette proposition qui est d'une grande importance pour l'étude des systèmes non linéaires.

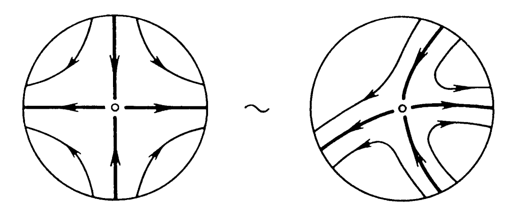


Fig. 152. Equivalence topologique d'un système et de son linéarisé

2. Réduction au cas $m_- = 0$. L'équivalence topologique de systèmes linéaires ayant les mêmes m_- et m_+ découle des trois lemmes suivants :

Lemme 1. *Les produits directs de systèmes topologiquement équivalents sont topologiquement équivalents.*

C'est-à-dire que si les systèmes définis par les opérateurs

$$A_1, B_1 : \mathbf{R}^{m_1} \to \mathbf{R}^{m_1} \quad \text{et} \quad A_2, B_2 : \mathbf{R}^{m_2} \to \mathbf{R}^{m_2}$$

se transforment l'un dans l'autre par les homéomorphismes $h_1 : \mathbf{R}^{m_1} \to \mathbf{R}^{m_1}$ et $h_2 : \mathbf{R}^{m_2} \to \mathbf{R}^{m_2}$, il existe un homéomorphisme $h : \mathbf{R}^{m_1} + \mathbf{R}^{m_2} \to \mathbf{R}^{m_1} + \mathbf{R}^{m_2}$ transformant le flot du système-produit

$$\dot{x}_1 = A_1 x_1, \quad \dot{x}_2 = A_2 x_2$$

en le flot du système-produit

$$\dot{x}_1 = B_1 x_1, \quad \dot{x}_2 = B_2 x_2.$$

La démonstration est évidente : il suffit en effet de poser

$$h(x_1, x_2) = (h_1(x_1), h_2(x_2)).$$

Dans le cours d'algèbre linéaire on a vu le

Lemme 2. *Si les valeurs propres d'un opérateur A dans $\mathbf{R}^n$ ne sont pas imaginaires pures, l'espace $\mathbf{R}^n$ se décompose en une somme directe de deux sous-espaces $\mathbf{R}^{m_-}$ et $\mathbf{R}^{m_+}$ invariants par A, de telle sorte que soient respectivement strictement négatives et strictement positives les parties réelles des valeurs propres de la restriction de A à $\mathbf{R}^{m_-}$ et à $\mathbf{R}^{m_+}$* (fig. 153).

Ceci découle, par exemple, du théorème sur la forme normale de Jordan.

Les lemmes 1 et 2 ramènent la démonstration de l'équivalence topologique au cas particulier suivant :

LEMME 3. *Soit A un opérateur linéaire dans* $\mathbf{R}^n$ *dont est strictement positive la partie réelle de toute valeur propre* (fig. 154). *Alors le système*

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

est topologiquement équivalent au système standard (fig. 154) :

$$\dot{x} = x, \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

Ce lemme est presque évident en dimension un et dans le cas d'un foyer sur le plan et, par conséquent, d'après le lemme 1, pour tout système ne possédant pas de racines multiples.

Nous procéderons plus loin à la démonstration du lemme 3 dans le cas général.

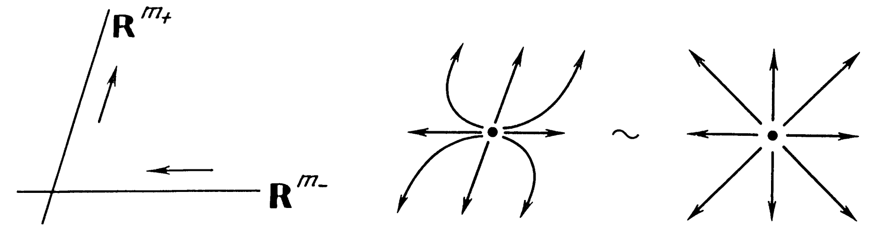


Fig. 153. Sous-espaces invariants d'un opérateur ne possédant pas de valeurs propres imaginaires pures

Fig. 154. Tous les nœuds instables sont topologiquement équivalents

3. La fonction de Liapounov. La démonstration du lemme 3 repose sur la construction d'une forme quadratique spéciale appelée *fonction de Liapounov*.

THÉORÈME. *Soit A un opérateur linéaire dans* $\mathbf{R}^n$ *dont est strictement positive la partie réelle de toute valeur propre. Il existe alors une structure euclidienne sur* $\mathbf{R}^n$ *telle que le vecteur Ax forme en chaque point $x \neq 0$ un angle aigu avec le rayon vecteur x.*

En d'autres termes :

Il existe une forme quadratique définie positive r^2 sur $\mathbf{R}^n$ *telle que sa dérivée suivant la direction du champ de vecteurs Ax est strictement positive :*

$$L_{Ax} r^2 > 0 \quad \textit{lorsque}\; x \neq 0. \tag{1}$$

Ou encore:

Dans $\mathbf{R}^n$ *il existe un ellipsoïde centré en 0 et tel qu' en chacun de ses points x le vecteur Ax est orienté vers l'extérieur* (fig. 155).

On vérifie sans peine que les trois formulations sont équivalentes.

Nous démontrerons ce théorème (et nous en servirons dans la suite) dans sa deuxième formulation. La démonstration passe plus facilement dans le cas des complexes :

Supposons que les parties réelles de toutes les valeurs propres λ_k d'un opérateur A dans $\mathbf{C}^n$ soient strictement positives. Il existe alors une forme quadratique définie positive $r^2 : {}^{\mathbf{R}}\mathbf{C}^n \to \mathbf{R}$ dont la dérivée suivant la direction du champ de vecteurs ${}^{\mathbf{R}}Az$ est une forme quadratique définie positive

$$L_{{}^{\mathbf{R}}Az}\, r^2 > 0 \quad \textit{lorsque}\ z \neq 0. \tag{2}$$

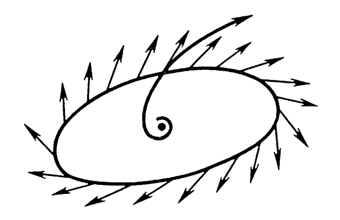


Fig. 155. Surface de niveau de la fonction de Liapounov

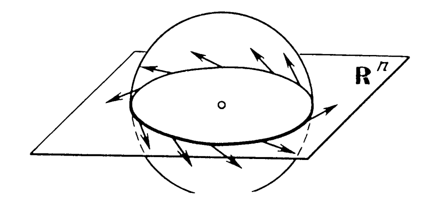


Fig. 156. Surface de niveau de la fonction de Liapounov dans $\mathbf{C}^n$

En appliquant l'inégalité (2) au cas où l'opérateur A est le complexifié d'un opérateur réel et où z appartient à un sous-espace réel (fig. 156) nous obtenons le théorème (1) pour les réels.

4. Construction de la fonction de Liapounov. Prenons comme fonction de Liapounov r^2 la somme des carrés des modules des coordonnées dans une base complexe convenable :

$$r^2 = (z, \bar{z}) = \sum_{k=1}^{n} z_k \bar{z}_k .$$

Si l'on fixe la base, on peut identifier le vecteur z à une suite de nombres $z_1, \ldots, z_n$ et l'opérateur $A : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ à une matrice (a_{kl}). Les calculs montrent que la dérivée est une forme quadratique

$$L_{{}^{\mathbf{R}}Az}(z, \bar{z}) = (Az, \bar{z}) + (z, \overline{Az}) = 2 \operatorname{Re} (Az, \bar{z}). \tag{3}$$

Si la base est propre, la forme quadratique obtenue est définie positive (fig. 157). En effet dans ce cas on a

$$2 \operatorname{Re} (Az, \bar{z}) = 2 \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re} \lambda_k \, |z_k|^2. \tag{4}$$

Par hypothèse toutes les parties réelles des valeurs propres λ_k sont strictement positives. Aussi la forme (4) est définie positive.

Si l'opérateur A ne possède pas de base propre, il possède une base presque propre qui peut être utilisée avec le même succès pour la construction de la fonction de Liapounov.

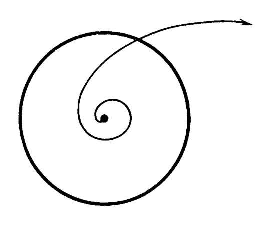


Fig. 157. Définition positive de la forme (4) pour $n = 1$

Fig. 158. Construction de la base dans laquelle la matrice associée à l'opérateur est triangulaire

Plus exactement est vrai le

LEMME 4. *Soient A un opérateur $\mathbf{C}$-linéaire dans $\mathbf{C}^n$ et $\varepsilon > 0$. On peut alors choisir dans $\mathbf{C}^n$ une base telle que la matrice A soit trigonale supérieure et tous les éléments situés au-dessus de la diagonale soient de module strictement inférieur à ε :*

$$(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & <\varepsilon \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Démonstration. L'existence de la base dans laquelle la matrice est trigonale supérieure résulte, par exemple, du théorème sur la forme normale de Jordan.

Cette base se construit aisément par récurrence sur n en utilisant le seul fait que tout opérateur linéaire A dans $\mathbf{C}^n$ possède un vecteur propre. Soit ξ_1 ce vecteur (fig. 158). Considérons l'espace quotient $\mathbf{C}^n/\mathbf{C}\xi_1 \cong \mathbf{C}^{n-1}$. L'opérateur A définit sur l'espace quotient un opérateur $\tilde{A} : \mathbf{C}^{n-1} \to \mathbf{C}^{n-1}$. Soit $\eta_2, \dots, \eta_n$ une base de $\mathbf{C}^{n-1}$ dans laquelle la matrice associée à l'opérateur $\tilde{A}$ est trigonale supérieure. Désignons par $\xi_2, \dots, \xi_n$ des représentants arbitraires des classes $\eta_2, \dots, \eta_n$ dans $\mathbf{C}^n$. Alors la base $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ est la base cherchée.

Supposons que dans la base $\xi_1, \dots, \xi_n$ la matrice associée à l'opérateur A soit trigonale supérieure. Montrons que *les éléments situés au-dessus de la diagonale peuvent être rendus aussi petits que l'on veut au moyen d'un changement des vecteurs de base par des vecteurs proportionnels*. Soient, en effet, a_{kl} les éléments de la matrice associée à l'opérateur A dans la base

ξ_k de sorte que $a_{kl} = 0$ lorsque $k > l$. Dans la base $\xi_k' = N^k \xi_k$ les éléments de la matrice associée à l'opérateur A seront $a_{kl}' = a_{kl} N^{l-k}$. Lorsque N sera suffisamment petit, on aura $|a_{kl}'| < \varepsilon$ pour tous les $l > k$.

Le lemme 4 est démontré.

Comme fonction de Liapounov (pour ε suffisamment petit) nous allons prendre précisément la somme des carrés des modules des coordonnées dans la base « ε-presque propre » considérée.

5. Estimation de la dérivée. Considérons l'ensemble de toutes les formes quadratiques définies sur $\mathbf{R}^m$. Cet ensemble est muni d'une structure naturelle d'espace vectoriel $\mathbf{R}^{\frac{m(m+1)}{2}}$.

Le lemme suivant est évident.

LEMME 5. *L'ensemble des formes quadratiques définies positives sur* $\mathbf{R}^m$ *est un ouvert dans* $\mathbf{R}^{\frac{m(m+1)}{2}}$.

Autrement dit, si une forme $a = \sum_{k,\, l=1}^{m} a_{kl} x_k x_l$ est définie positive, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que toute forme $a + b$, où $|b_{kl}| < \varepsilon$ (pour tous les k, l tels que $1 \leqslant k, l \leqslant m$) soit aussi définie positive.

Démonstration. La forme a est strictement positive en tous les points de la sphère unité $\sum_{k=1}^{m} x_k^2 = 1$. La sphère est compacte et la forme est continue. Donc la borne inférieure est atteinte et, par conséquent, partout sur la sphère on a $a(x) \geqslant \alpha > 0$.

Si $|b_{kl}| < \varepsilon$, sur la sphère $|b(x)| \leqslant \sum |b_{kl}| \leqslant m^2 \varepsilon$.

C'est pourquoi lorsque $\varepsilon < \alpha / m^2$, la forme $a + b$ est strictement positive sur la sphère, donc définie positive. Le lemme est démontré.

REMARQUE. De nos raisonnements il s'ensuit que toute forme quadratique définie positive vérifie partout une inégalité de la forme

$$\alpha \|x\|^2 \leqslant a(x) \leqslant \beta \|x\|^2, \qquad 0 < \alpha < \beta. \tag{5}$$

EXERCICE 1. Montrer que l'ensemble des formes quadratiques non dégénérées de signature donnée est ouvert.

EXEMPLE. L'espace des formes quadratiques de deux variables $ax^2 + 2bxy + cy^2$ est un espace à 3 dimensions de coordonnées a, b, c (fig. 159). Le cône $b^2 = ac$ divise cet espace en trois parties ouvertes conformément aux signatures.

Utilisons le lemme 5 pour montrer que pour ε suffisamment petit la dérivée, suivant le champ de vecteurs ${}^{\mathbf{R}}Az$, de la somme des carrés des modules des coordonnées dans une base « ε-presque propre », choisie d'après le lemme 4, est une forme définie positive.

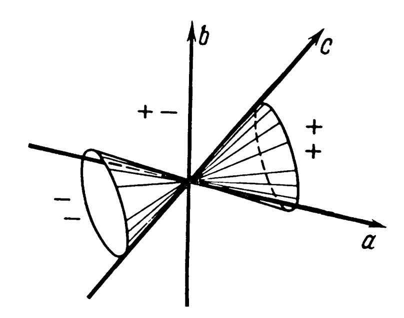


Fig. 159. Espace des formes quadratiques

D'après la formule (3) cette dérivée est une forme quadratique en x_k et y_k, respectivement parties réelle et imaginaire des coordonnées $z_k = x_k + iy_k$.

Tirons de la formule (3) les termes composés avec les éléments de la matrice (A) situés sur et au-dessus de la diagonale :

$$L_{\mathbf{R}_{Az}} r^2 = P + Q, \quad \text{où} \quad P = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=l} a_{kl} z_k \bar{z}_l, \; Q = 2 \operatorname{Re} \sum_{k<l} a_{kl} z_k \bar{z}_l.$$

Remarquons que les éléments diagonaux de la matrice trigonale (A) sont les valeurs propres λ_k de l'opérateur A. Par conséquent, *la forme quadratique*

$$P = \sum_{k=1}^{n} 2 \operatorname{Re} \lambda_k (x_k^2 + y_k^2)$$

en x_k, y_k *est définie positive et ne dépend pas du choix de la base* *).

Du lemme 5 nous déduisons que pour un ε suffisamment petit la forme $P + Q$ (proche de P) est également définie positive, car les coefficients de la forme Q en x_k, y_k, pour des valeurs suffisamment petites de ε, deviennent aussi petits que l'on veut (étant donné que $|a_{kl}| < \varepsilon$ lorsque $k < l$).

L'inégalité (2) et avec elle l'inégalité (1) sont démontrées.

Remarque. Puisque $L_{Ax} r^2$ est une forme quadratique définie positive, on a l'inégalité de la forme (5) :

$$\alpha r^2 \leqslant L_{Ax} r^2 \leqslant \beta r^2, \tag{5'}$$

pour certaines valeurs des constantes $\beta > \alpha > 0$.

Par conséquent, le théorème énoncé au point 3 sur la fonction de Liapounov est démontré.

Les exercices suivants conduisent à une autre démonstration de ce théorème.

---

*) Soulignons que l'application ${}^{\mathbf{R}}\mathbf{C}^n \to \mathbf{R}$ associée à la forme P *dépend* du choix de la base.

EXERCICE 2. Montrer que la dérivation suivant le champ de vecteurs Ax sur $\mathbf{R}^n$ définit un opérateur linéaire $L_A : \mathbf{R}^{\frac{n(n+1)}{2}} \to \mathbf{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ de l'espace des formes quadratiques sur $\mathbf{R}^n$ sur lui-même.

EXERCICE 3. Les valeurs propres λ_i de l'opérateur A étant connues, en déduire celles de l'opérateur L_A.

Réponse. $\lambda_i + \lambda_j$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

Nota. Admettons que A possède une base propre. Alors les vecteurs propres de L_A seront des formes quadratiques égales aux produits deux à deux des formes linéaires qui ne sont autres que les vecteurs propres de l'opérateur dual de A.

EXERCICE 4. Montrer que l'opérateur L_A est un isomorphisme si les valeurs propres de A ne sont pas opposées. En particulier, si les parties réelles de toutes les valeurs propres de l'opérateur A ont même signe, chaque forme quadratique sur $\mathbf{R}^n$ est la dérivée d'une forme quadratique suivant le champ de vecteurs Ax.

EXERCICE 5. Montrer que si les parties réelles de toutes les valeurs propres de l'opérateur A sont strictement positives, la forme quadratique dont la dérivée suivant le champ Ax est définie positive est elle-même définie positive (et par conséquent remplit toutes les conditions du théorème qu'on veut démontrer).

Nota. Représenter la forme quadratique par une intégrale de sa dérivée le long des orbites.

6. Construction de l'homéomorphisme h. Passons maintenant à la démonstration du lemme 3. L'homéomorphisme $h : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ qui transforme le flot $\{f^t\}$ de l'équation $\dot{x} = Ax$ (Re $\lambda_k > 0$) en le flot $\{g^t\}$ de l'équation $\dot{x} = x$ sera construit par la procédure suivante. Soit la sphère *)

$$S = \{x \in \mathbf{R}^n : r^2(x) = 1\},$$

où r^2 est la fonction de Liapounov de (1).

L'homéomorphisme h laissera fixes les points de cette sphère. Soit x_0 un point de la sphère (fig. 160). Au point $f^t x_0$ de l'orbite de l'équation $\dot{x} = Ax$ l'application h associera le point $g^t x_0$ de l'orbite de l'équation $\dot{x} = x$:

$$\begin{cases} h(f^t x_0) = g^t x_0, \forall t \in \mathbf{R}, \quad x_0 \in S, \\ h(0) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Nous devons vérifier que :

1) la formule (6) définit h d'une manière unique en tout point $x \in \mathbf{R}^n$;

2) l'application $h : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ est bijective et bicontinue ;

3) $h \circ f^t = g^t \circ h$.

La démonstration de ces assertions est évidente.

7. Démonstration du lemme 3.

LEMME 6. *Soit $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ une solution quelconque non nulle de l'équation $\dot{x} = Ax$. Formons la fonction réelle de la variable réelle t :*

$$\rho(t) = \ln r^2(\varphi(t)).$$

*) Ou si l'on veut un ellipsoïde.

Alors l'application $\rho : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est un difféomorphisme et de plus il existe deux constantes α et β telles que

$$\alpha \leqslant \frac{d\rho}{dt} \leqslant \beta.$$

Démonstration. D'après le théorème d'unicité

$$r^2(\varphi(t)) \neq 0 \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

D'après (5′) pour $d\rho/dt = L_{Ax} r^2/r^2$ on a

$$\alpha \leqslant \frac{d\rho}{dt} \leqslant \beta.$$

C.Q.F.D.

Du lemme 6 il vient :

1) *Chaque point $x \neq 0$ se représente sous la forme $x = f^t x_0$, où $x_0 \in S$, $t \in \mathbf{R}$ et $\{f^t\}$ est le flot de l'équation $\dot{x} = Ax$.*

Considérons en effet la solution φ qui vérifie la condition initiale $\varphi(0) = x$. D'après le lemme 6 il existe une valeur de τ pour laquelle $r^2(\varphi(\tau)) = 1$. Le point $x_0 = \varphi(\tau)$ appartient à S. En posant $t = -\tau$ on a $x = f^t x_0$.

2) *Cette représentation est unique.*

En effet, l'orbite issue de x (fig. 160) est unique et coupe la sphère en un seul point x_0 (d'après le lemme 6) ; l'unicité de t découle également de la monotonie de $\rho(t)$ (lemme 6).

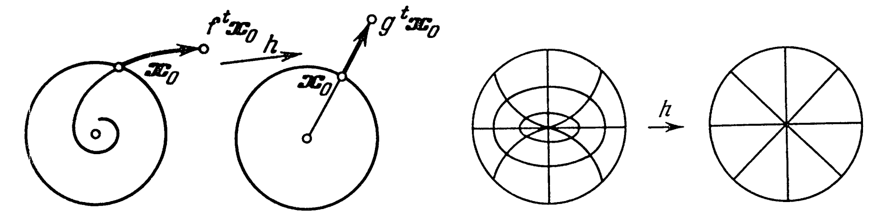


Fig. 160. Construction de l'homéomorphisme h

Fig. 161. L'homéomorphisme h est un difféomorphisme partout, sauf en 0

Ainsi nous avons construit une application bijective du produit direct d'une droite par une sphère sur l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$ privé d'un point

$$F : \mathbf{R} \times S^{n-1} \to \mathbf{R}^n \setminus 0, \qquad F(t, x_0) = f^t x_0.$$

Du théorème de la dépendance d'une solution par rapport aux conditions initiales il s'ensuit que l'application F, de même que son application réciproque, est continue (et est même un difféomorphisme).

Pour l'équation standard $\dot{x} = x$ on a $\dfrac{d\rho}{dt} = 2$. Donc l'application

$$G(t, x_0) = g^t x_0 : \mathbf{R} \times S^{n-1} \to \mathbf{R}^n \setminus 0$$

est également bijective et bicontinue.

D'après la définition (6) l'application h se confond avec l'application $G \circ F^{-1}$: $\mathbf{R}^n \setminus 0 \to \mathbf{R}^n \setminus 0$ partout, sauf au point 0.

Par conséquent, nous venons de démontrer que l'application $h : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ est une application bijective.

La continuité de h et h^{-1} partout sauf au point 0 découle de la continuité de F, F^{-1} et G, G^{-1} (en réalité h est partout un difféomorphisme sauf au point 0 ; fig. 161).

La continuité de h et h^{-1} au point 0 découle du lemme 6. Ce lemme nous permet même d'obtenir une estimation explicite de $r^2(h(x))$ en fonction de $r^2(x)$, $\|x\| \leqslant 1$:

$$(r^2(x))^{2/\alpha} \leqslant r^2(h(x)) \leqslant (r^2(x))^{2/\beta}.$$

Supposons en effet $x = F(t, x_0)$ pour $t \leqslant 0$. Alors $\beta t \leqslant \ln r^2(x) \leqslant \alpha t$ et $\ln r^2(h(x)) = 2t$. Enfin lorsque $x \neq 0$, on a $x = f^s x_0$, donc

$$(h \circ f^t)(x) = h(f^t(f^s(x_0))) = h(f^{t+s}(x_0)) =$$
$$= g^{t+s}(x_0) = g^t(g^s(x_0)) = g^t(h(x)) = (g^t \circ h)(x).$$

Lorsque $x = 0$, on a également $(h \circ f^t)(x) = (g^t \circ h)(x)$. Donc les assertions 1), 2), 3) du point 6 sont prouvées. Ce qui achève la démonstration du lemme 3.

8. Démonstration du théorème de classification topologique. Des lemmes 1, 2 et 3 il s'ensuit que tout système linéaire $\dot{x} = Ax$ dont l'opérateur $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ a ses valeurs propres à parties réelles non nulles est topologiquement équivalent à un col multidimensionnel standard (fig. 162) :

$$\dot{x}_1 = -x_1, \quad \dot{x}_2 = x_2, \quad x_1 \in \mathbf{R}^{m_-}, \quad x_2 \in \mathbf{R}^{m_+}.$$

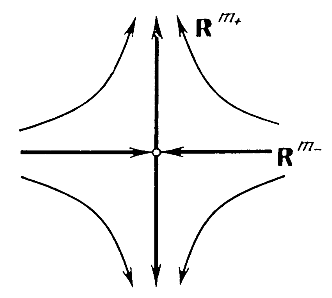


Fig. 162. Col standard

Par conséquent, deux tels systèmes admettant les mêmes m_- et m_+ sont topologiquement équivalents.

Remarquons que les sous-espaces $\mathbf{R}^{m_-}$ et $\mathbf{R}^{m_+}$ sont invariants par le flot $\{g^t\}$. Lorsque t croît, tout point de $\mathbf{R}^{m_-}$ tend vers 0.

EXERCICE 1. Montrer que $g^t x \to 0$ lorsque $t \to +\infty$ si, et seulement si, $x \in \mathbf{R}^{m_-}$.

Pour cette raison, $\mathbf{R}^{m_-}$ est appelé *variété invariante rentrante* du col. D'une façon analogue, $\mathbf{R}^{m_+}$ est appelé *variété invariante partante.* La variété invariante partante est définie par la condition $g^t x \to 0$ lorsque $t \to -\infty$.

Démontrons maintenant la deuxième partie du théorème de classification topologique, i.e. *des systèmes topologiquement équivalents admettent le même nombre de valeurs à parties réelles strictement négatives.*

Ce nombre est précisément égal à la dimension m_- de la variété invariante rentrante. Il suffit donc de démontrer que *la dimension des variétés invariantes rentrantes est la même pour les cols topologiquement équivalents.*

Remarquons que tout homéomorphisme h, transformant le flot d'un col en le flot d'un autre col, transforme nécessairement la variété invariante rentrante de l'un en la variété invariante rentrante de l'autre (puisque le passage à la limite 0 lorsque $t \to +\infty$ est conservé par l'homéomorphisme). Par conséquent, l'homéomorphisme h réalise également une application homéomorphe de la variété invariante rentrante d'un col sur la variété invariante rentrante de l'autre col.

L'égalité des dimensions des variétés invariantes découle maintenant de la proposition topologique suivante :

La dimension de l'espace $\mathbf{R}^n$ *est un invariant topologique.* En d'autres termes, *l'homéomorphisme* $h : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ *n'existe qu'entre des espaces de même dimension.*

Quoique évidente *), cette proposition n'est pas si simple à prouver. La démonstration ne sera pas donnée ici.

EXERCICE 2. Montrer que 4 cols à trois dimensions tels que $(m_-, m_+) = (3, 0), (2, 1), (1, 2), (0, 3)$ ne sont pas topologiquement équivalents (sans utiliser la proposition topologique non démontrée).

Nota. Une variété invariante à une dimension est constituée de trois orbites ; une variété invariante de dimension supérieure à 1 d'une infinité d'orbites (fig. 163).

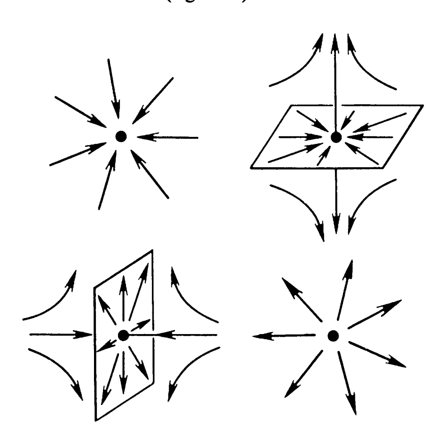


Fig. 163. Variétés invariantes de cols à trois dimensions

*) Il existe cependant des applications bijectives de $\mathbf{R}^m$ sur $\mathbf{R}^n$ et des applications continues de $\mathbf{R}^m$ sur $\mathbf{R}^n$ pour $m < n$ (par exemple de $\mathbf{R}^1$ sur $\mathbf{R}^2$).

Par conséquent, la classification topologique des systèmes linéaires dont sont non nulles les parties réelles des valeurs propres a été réalisée complètement dans $\mathbf{R}^1$, $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^3$, tandis que dans $\mathbf{R}^n$, $n > 3$, nous sommes contraints de nous appuyer sur l'assertion non démontrée de l'invariance topologique de la dimension.

EXERCICE 3. Procéder à une classification topologique des opérateurs linéaires A dans $\mathbf{R}^n$ dont le module des valeurs propres est différent de l'unité.

§ 23. Stabilité des positions d'équilibre

La stabilité des positions d'équilibre d'un système non linéaire se résout de la même manière que pour un système linéarisé si les valeurs propres de ce dernier ne sont pas situées sur l'axe imaginaire.

1. Stabilité au sens de Liapounov. Soit l'équation

$$\dot{x} = v(x), \quad x \in U \subset \mathbf{R}^n, \tag{1}$$

où v est un champ de vecteurs r fois ($r > 2$) différentiable sur le domaine U. Supposons que l'équation (1) possède une position d'équilibre (fig. 164). Choisissons les coordonnées x_i de telle sorte que cette position d'équilibre coïncide avec l'origine des coordonnées $v(0) = 0$.

La solution vérifiant la condition initiale $\varphi(t_0) = 0$ est $\varphi = 0$. Intéressons-nous au comportement des solutions vérifiant des conditions initiales voisines.

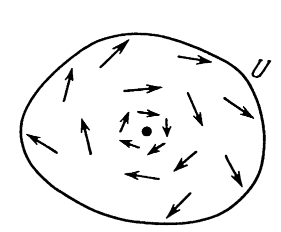


Fig. 164. On demande si les orbites nées dans un voisinage suffisamment petit d'un point d'équilibre resteront à proximité de ce point

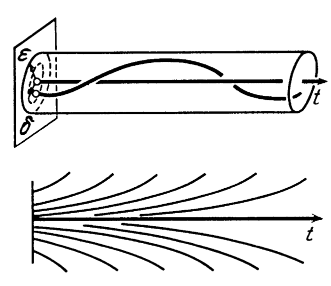


Fig. 165. Positions d'équilibre stable et instable : les courbes intégrales ont des allures différentes

DÉFINITION. La position d'équilibre $x = 0$ de l'équation (1) est dite *stable* (ou *stable au sens de Liapounov*) si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ (dépendant seulement de ε et non pas de la variable t dont il sera question plus bas) tel que pour tout x_0 *) tel que $\|x_0\| < \delta$, la solution φ de l'équa-

*) Si $x = (x_1, \ldots, x_n)$, alors $|x|^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$.

tion (1) qui vérifie la condition initiale $\varphi(0) = x_0$ se prolonge au demi-axe $t > 0$ tout entier et satisfasse à l'inégalité $\|\varphi(t)\| < \varepsilon$ quel que soit $t > 0$ (fig. 165).

En d'autres termes, *la stabilité de la position d'équilibre au sens de Liapounov équivaut à la convergence uniforme* (*vers la solution constante*) *sur l'intervalle* $[0, +\infty[$ *des solutions dont les valeurs initiales tendent vers la position d'équilibre envisagée.* La convergence des valeurs des solutions pour tout t fixé est garantie par le théorème de dépendance continue de la solution par rapport à la condition initiale ; c'est la convergence uniforme, i.e. l'indépendance de δ par rapport à t, qui est importante.

EXERCICE 1. Etudier la stabilité des positions d'équilibre :

1) $\dot{x} = 0$; 2) $\dot{x} = x$; 3) $\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2,\\ \dot{x}_2 = -x_1\end{cases}$; 4) $\begin{cases}\dot{x}_1 = x_1,\\ \dot{x}_2 = -x_2\end{cases}$; 5) $\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2,\\ \dot{x}_2 = -\sin x_1.\end{cases}$

EXERCICE 2. Montrer que la définition donnée est correcte, i.e. la stabilité de la position d'équilibre ne dépend pas du système de coordonnées qui a servi à la définir.

EXERCICE 3. Supposons que quels que soient $N > 0$ et $\varepsilon > 0$, il existe une solution φ de l'équation (1) telle que pour un certain $t > 0$, $\|\varphi(t)\| > N\|\varphi(0)\|$ et $\|\varphi(0)\| < \varepsilon$. Peut-on en déduire que la position d'équilibre $x = 0$ est instable ?

2. Stabilité asymptotique.

DÉFINITION. On dit que la position d'équilibre $x = 0$ de l'équation (1) est *asymptotiquement stable* si elle est stable (au sens de Liapounov) et si

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi(t) = 0$$

pour toute solution φ vérifiant la condition initiale $\varphi(0)$ située dans un voisinage suffisamment petit de 0 (fig. 166).

EXERCICE 1. Résoudre les exercices 1), 2) et 3) du point 1 en prenant soin d'y remplacer partout la stabilité par une stabilité asymptotique.

EXERCICE 2. Peut-on conclure à la stabilité de la position d'équilibre au sens de Liapounov si toute solution tend vers cette position lorsque $t \to +\infty$?

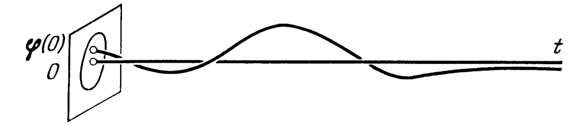


Fig. 166. Stabilité asymptotique de la position d'équilibre : courbes intégrales

3. Théorème de la stabilité en première approximation. Considérons simultanément à (1) l'équation linéarisée (fig. 167)

$$\dot{x} = Ax, \quad A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n. \tag{2}$$

Alors $v(x) = v_1 + v_2$, $v_1(x) = Ax$, $v_2(x) = O(\|x\|^2)$.

THÉORÈME. *Si toutes les valeurs propres* λ *de l'opérateur* A *sont situées sur le demi-plan gauche* : Re $\lambda < 0$ (fig. 168), *la position d'équilibre* $x = 0$ *de l'équation* (1) *est asymptotiquement stable.*

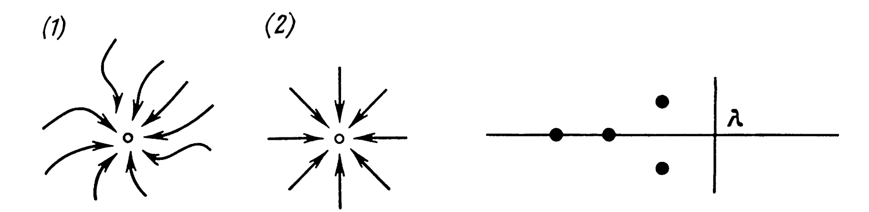


Fig. 167. Orbites des équations (1) et (2) Fig. 168. Valeurs propres de l'opérateur A

EXERCICE 1. Citer un exemple de position d'équilibre instable (au sens de Liapounov) de l'équation (1), pour laquelle tous les Re $\lambda \leqslant 0$.

REMARQUE. On peut montrer que si la partie réelle d'au moins une valeur propre λ est strictement *positive*, la position d'équilibre est instable. En cas de nullité des parties réelles la stabilité dépend des termes de la série de Taylor de degré > 1).

EXERCICE 2. Etablir si est stable (au sens de Liapounov et asymptotiquement) la position nulle d'équilibre du système $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -x_1^n$.

Réponse. Si n est pair, la position est instable (au sens de Liapounov) ; si n est impair, la position est stable (au sens de Liapounov) mais pas asymptotiquement.

4. Démonstration du théorème. En vertu du § 22, point 3, il existe une fonction de Liapounov qui est une forme quadratique définie positive r^2 dont la dérivée suivant le champ de vecteurs v_1 est une forme définie négative :

$$L_{v_1} r^2 \leqslant -2\gamma r^2,$$

où $\gamma > 0$ est une constante (fig. 169).

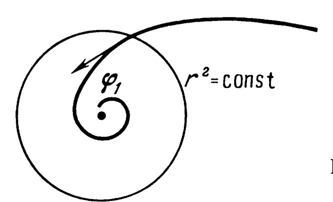


Fig. 169. Surface de niveau de la fonction de Liapounov

LEMME. *Dans un voisinage suffisamment petit du point* $x = 0$, *la dérivée de la fonction de Liapounov suivant le champ non linéaire* v *vérifie*

l'inégalité

$$L_v r^2 \leqslant -\gamma r^2. \tag{3}$$

En effet,

$$L_v r^2 = L_{v_1} r^2 + L_{v_2} r^2.$$

Montrons que pour r petit le deuxième terme est de beaucoup inférieur au premier :

$$L_{v_2} r^2 = O(r^3). \tag{4}$$

En effet, quels que soient le champ $\boldsymbol{u}$ et la fonction f on a

$$L_u f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} u_i .$$

Dans notre cas ($\boldsymbol{u} = v_2, f = r^2$) $u_i = O(r^2)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = O(r)$ (dire pourquoi ?), d'où la relation (4).

Il existe donc $C > 0$ et $\delta > 0$ tels que pour tout $\boldsymbol{x}$ satisfaisant à la condition $\|\boldsymbol{x}\| < \delta$ on a

$$|L_{v_2} r^2|_{\boldsymbol{x}} \leqslant C|r^2(\boldsymbol{x})|^{3/2}.$$

Le deuxième membre est inférieur à γr^2 pour $\|\boldsymbol{x}\|$ suffisamment petit, si bien que dans un certain vosinage du point $\boldsymbol{x} = 0$

$$L_v r^2 \leqslant -2\gamma r^2 + \gamma r^2 = -\gamma r^2.$$

Le lemme est démontré.

Soit φ une solution de l'équation (1) distincte de la solution nulle et vérifiant une condition initiale située dans un voisinage suffisamment petit du point $\boldsymbol{x} = 0$. Définissons une fonction du temps ρ par la relation

$$\rho(t) = \ln r^2(\varphi(t)), \qquad t \geqslant 0.$$

En vertu du théorème d'unicité $r^2(\varphi(t)) \neq 0$, de sorte que la fonction ρ est définie et différentiable. D'après l'inégalité (3) on a

$$\dot{\rho} = \frac{1}{r^2 \circ \varphi} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} r^2 \circ \varphi = \frac{L_v r^2}{r^2} \leqslant -\gamma.$$

D'où il vient que $r^2(\varphi(t))$ est strictement décroissante et tend vers 0 lorsque $t \to +\infty$:

$$\rho(t) \leqslant \rho(0) - \gamma t, \qquad r^2(\varphi(t)) \leqslant r^2(\varphi(0))e^{-\gamma t} \to 0. \tag{5}$$

C.Q.F.D.

EXERCICE 1. Indiquer la lacune de cette démonstration.

Solution. Nous n'avons pas prouvé que la solution φ était indéfiniment prolongeable en avant.

Soit $\sigma > 0$ tel que l'inégalité (3) soit satisfaite pour $\|x\| < \sigma$.

Soit dans l'espace des phases élargi (fig. 170) le compact

$$F = \{x, t : r^2(x) \leqslant \sigma, \quad |t| \leqslant T\}.$$

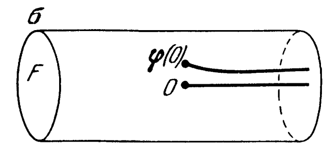


Fig. 170. Prolongement indéfini en avant d'une solution

Soit enfin une solution φ vérifiant la condition initiale $\varphi(0)$, où $r^2(\varphi(0)(< \sigma$. D'après le théorème de prolongement, cette solution est prolongeable en avant jusqu'à la frontière du cylindre F. Mais tant que le point $(t, \varphi(t))$ appartient à F, la dérivée de la fonction $r^2(\varphi(t))$ est strictement négative. C'est pourquoi la solution ne peut sortir sur la surface latérale du cylindre F (où $r^2 = \sigma^2$) et par conséquent est prolongeable jusqu'à $t = T$.

T étant arbitraire (et ne dépendant pas de σ) la solution φ se prolonge indéfiniment en avant et de plus $r^2(\varphi(t)) < \sigma^2$, de sorte que l'inégalité (3) a lieu quel que soit $t \geqslant 0$.

REMARQUE 1. Nous venons de démontrer plus que la stabilité asymptotique de la position d'équilibre. De l'inégalité (5) il vient que la convergence de $\varphi(t) \to 0$ est uniforme (par rapport à des conditions initiales x_0 suffisamment proches de 0).

Par ailleurs l'inégalité (5) définit la vitesse de convergence (qui est exponentielle).

En somme, ce théorème affirme que la convergence exponentielle et uniforme des solutions de l'équation linéaire (2) vers 0 se conserve dans le cas d'une perturbation non linéaire $v_2(x) = O(\|x\|^2)$ du deuxième membre de l'équation. Une assertion analogue est vraie pour des perturbations d'une nature plus générale. On aurait pu, par exemple, considérer une perturbation non autonome $v_2(x, t)$ telle que $\|v_2(x, t)\| \leqslant \varphi(|x|)$, où $\varphi(|x|) = o(|x|)$ lorsque $x \to 0$.

EXERCICE 2. Montrer que sous les hypothèses du théorème démontré plus haut les équations (1) et (2) sont topologiquement équivalentes au voisinage de la position d'équilibre.

REMARQUE 2. Le théorème démontré plus haut nous conduit au problème d'algèbre suivant (appelé problème de Routh-Hurwitz).

On demande d'établir *si toutes les racines d'un polynôme donné sont situées sur le demi-plan gauche.*

Ce problème se résout au bout d'un nombre fini d'opérations arithmétiques sur les coefficients du polynôme. Les algorithmes correspondants sont

exposés dans les cours d'algèbre (*critère de Hurwitz, méthode de Sturm*) et de la variable complexe (*principe de l'argument, méthodes de Vychnégradski, Nykwist et Mikhaïlov*). Voir par exemple A. Kurosh, *Cours* d'algèbre supérieure, Editions Mir, 1971, ch. 9 ; M. Lavrentiev et B. Chabat, *Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe*, Editions Mir, 1972, ch. V. Nous reviendrons sur le problème de Routh-Hurwitz dans le § 36,5.

§ 24. Cas de valeurs propres imaginaires pures

Les équations linéaires dont les valeurs propres ne sont pas imaginaires pures ont été étudiées en détail dans les §§ 21, 22, Leurs orbites sont d'allure relativement simple (col, § 22, pt. 8).

Les équations linéaires dont les valeurs propres sont imaginaires pures nous fourniront des exemples d'orbites d'allure plus complexe.

De telles équations interviennent, par exemple, dans la théorie des oscillations de systèmes conservatifs (voir § 25, pt. 6).

1. Classification topologique. Supposons que toutes les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de l'équation linéaire

$$\dot{x} = Ax, \qquad x \in \mathbf{R}^n, \qquad A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n \tag{1}$$

soient imaginaires pures.

Dans quels cas deux équations de la forme (1) sont-elles topologiquement équivalentes ?

EXERCICE. Montrer que dans le cas d'un plan ($n = 2, \lambda_{1,2} = \pm i\omega \neq 0$), pour que deux équations de la forme (1) soient topologiquement équivalentes il faut et il suffit qu'elles soient algébriquement équivalentes, i.e. elles admettent les mêmes valeurs propres.

A l'heure actuelle un résultat analogue a été démontré pour $n > 2$.

2. Exemple. Soit dans $\mathbf{R}^4$ l'équation

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \omega_1 x_2, \\ \dot{x}_2 = -\omega_1 x_1, \\ \dot{x}_3 = \omega_2 x_4, \\ \dot{x}_4 = -\omega_2 x_3, \end{cases} \qquad \begin{matrix} \lambda_{1,2} = \pm i\omega_1, \\ \\ \lambda_{3,4} = \pm i\omega_2. \end{matrix} \tag{2}$$

Fig. 171. Espace des phases du système (2)

L'espace $\mathbf{R}^4$ se décompose en une somme directe de deux plans invariants (fig. 171) :

$$\mathbf{R}^4 = \mathbf{R}_{1,2} + \mathbf{R}_{3,4}.$$

Le système (2) se décompose en deux systèmes indépendants :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \omega_1 x_2, \\ \dot{x}_2 = -\omega_1 x_1, \end{cases} \quad (x_1, x_2) \in \mathbf{R}_{1,2},$$
$$\begin{cases} \dot{x}_3 = \omega_2 x_4, \\ \dot{x}_4 = -\omega_2 x_3, \end{cases} \quad (x_3, x_4) \in \mathbf{R}_{3,4}. \qquad (3)$$

Dans chacun des plans considérés les orbites sont des cercles

$$S^1 = \{x \in \mathbf{R}_{1,2} : x_1^2 + x_2^2 = C > 0\}$$

ou des points ($C = 0$), quant au flot il est constitué de rotations (d'angles respectivement $\omega_1 t$ et $\omega_2 t$).

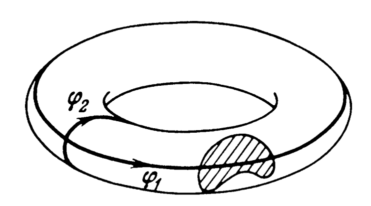
Toute orbite de l'équation (2) appartient au produit direct des orbites situées sur les plans $\mathbf{R}_{1,2}$ et $\mathbf{R}_{3,4}$. Supposons que ces orbites soient des cercles.

Le produit direct de deux cercles

$$T^2 = S^1 \times S^1 = \{x \in \mathbf{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 = C, x_3^2 + x_4^2 = D\}$$

porte le nom de *tore à 2 dimensions*.

Pour mieux se représenter un tore T^2 on peut procéder de la manière suivante. Considérons dans $\mathbf{R}^3$ la surface (fig. 172) obtenue par rotation d'un cercle autour d'un axe situé dans le même plan que ce cercle et ne le coupant pas. Tout point de cette surface est défini par deux coordonnées angulaires φ_1, φ_2 mod 2π. Les coordonnées φ_1 et φ_2 définissent un difféomorphisme entre cette surface de rotation et le produit direct T^2 de deux cercles.



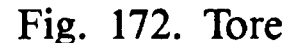


Fig. 172. Tore

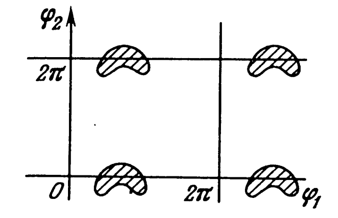


Fig. 173. Carte du tore

On peut donner aux coordonnées φ_1 et φ_2 les noms de *longitude* et *latitude*. La carte du tore T^2 (voir fig. 173) peut être représentée sur la case $0 \leqslant \varphi_1 \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \varphi_2 \leqslant 2\pi$ du plan (φ_1, φ_2) en « collant » les points $(\varphi_1, 0)$ et $(\varphi_1, 2\pi)$, $(0, \varphi_2)$ et $(2\pi, \varphi_2)$. On peut également considérer comme carte

tout le plan (φ_1, φ_2), mais alors chaque point du tore aura une infinité d'images sur la carte (comme les deux images de Tchoukotka *) sur la carte des hémisphères).

Le flot de l'équation (2) laisse fixe le tore $T^2 \subset \mathbf{R}^4$. Les orbites de l'équation (2) sont situées sur la surface de T^2. Si φ_1 est un angle polaire sur le plan $\mathbf{R}_{1,2}$, mesuré dans le sens du vecteur unité x_2 au vecteur unité x_1, on a, d'après (3), $\dot{\varphi}_1 = \omega_1$. De la même façon en mesurant φ_2 dans le sens de x_4 à x_3 on obtient $\dot{\varphi}_2 = \omega_2$. Donc

Sur la surface de T^2 les orbites du flot (2) *vérifient l'équation différentielle*

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_1, \quad \dot{\varphi}_2 = \omega_2. \tag{4}$$

La latitude et la longitude d'un point varient donc uniformément. Sur la carte du tore le mouvement est représenté par une ligne droite tandis que sur le tore on obtient une « hélice » (fig. 174).

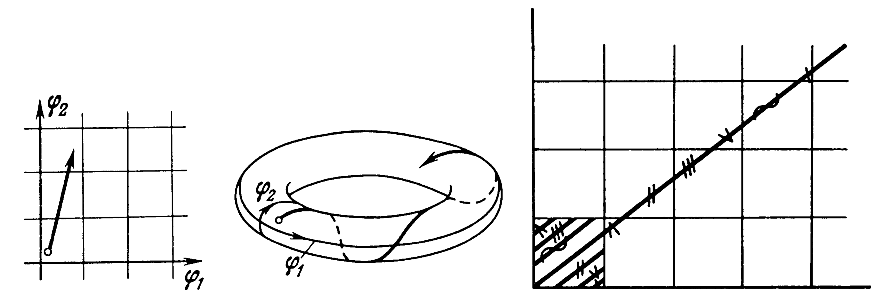


Fig. 174. Hélice du tore

Fig. 175. Courbe partout dense sur le tore

3. Orbites de l'équation (4) sur le tore. Les nombres ω_1 et ω_2 sont dits *rationnellement indépendants* si la relation $k_1 \omega_1 + k_2 \omega_2 = 0$, où k_1 et k_2 sont des entiers, entraîne $k_1 = k_2 = 0$. Exemple : $\sqrt{2}$ et $\sqrt{8}$ sont rationnellement dépendants, à l'inverse de $\sqrt{6}$ et $\sqrt{8}$.

THÉORÈME. *Si ω_1 et ω_2 sont rationnellement dépendants, toute orbite de l'équation* (4) *est fermée sur le tore. Si au contraire ω_1 et ω_2 sont rationnellement indépendants, alors toute orbite de l'équation* (4) *est partout dense* **) *dans le tore T^2* (fig. 175).

*) Presqu'île du Nord-Est de l'U.R.S.S. (*Note du traducteur*).

**) Un ensemble A est partout dense dans un espace B s'il existe un point de A dans un voisinage aussi petit que l'on veut de tout point de B.

En d'autres termes :

Si, dans chaque case d'un échiquier infini, se trouve un lièvre (la disposition des lièvres est partout la même) et si un chasseur tire sous un angle (par rapport aux lignes de l'échiquier) dont la tangente est irrationnelle, il atteindra au moins un lièvre. (Il est clair que si la tangente est rationnelle, on peut disposer des lièvres de taille suffisamment petite de telle sorte que le chasseur manque son coup.)

LEMME. *Soit une rotation d'angle α d'un cercle S^1, incommensurable avec 2π* (fig. 176). *Les images d'un point quelconque de S^1 par les rotations*

$$\varphi, \varphi + \alpha, \quad \varphi + 2\alpha, \quad \varphi + 3\alpha, \quad \dots \quad (\text{mod } 2\pi)$$

forment un ensemble partout dense sur S^1.

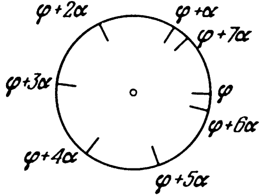


Fig. 176. Images d'un cercle par des rotations d'angle α

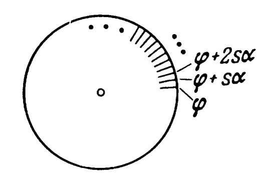


Fig. 177. Les points $\varphi + Ns\alpha$

Nous pouvons déduire la démonstration de ce lemme à partir de la structure des sous-groupes fermés de la droite (voir § 9). Voyons une autre démonstration.

LE PRINCIPE DES BOÎTES DE DIRICHLET. *Si k boîtes renferment $k + 1$ objets, l'une d'elles au moins renferme plus d'un objet.*

Divisons le cercle S^1 en k intervalles égaux de longueur $2\pi/k$. D'après le principe des boîtes, deux des $k + 1$ premiers points de notre suite sont contenus dans le même intervalle. Supposons qu'il s'agisse des points $\varphi + p\alpha$ et $\varphi + q\alpha, p > q$. Soit $s = p - q$. L'angle de rotation $s\alpha$ diffère de 2π ou d'un multiple de 2π d'un angle $< 2\pi/k$. Dans la suite φ, $\varphi + s\alpha$, $\varphi + 2s\alpha$, $\varphi + 3s\alpha$, ... (mod 2π) (fig. 177) deux points voisins quelconques sont séparés par une même distance $< 2\pi/k$. Soit $\varepsilon > 0$. En prenant k suffisamment grand nous pouvons rendre $2\pi/k < \varepsilon$. Tout ε-voisinage d'un point quelconque de S^1 contient des points de la suite

$$\varphi + Ns\alpha \ (\text{mod } 2\pi).$$

Le lemme est démontré.

REMARQUE. Nous n'avons pas utilisé l'incommensurabilité de α avec 2π. Pourtant il est évident que, lorsque α est commensurable avec 2π, le lemme est faux.

EXERCICE. Trouver et combler la lacune de cette démonstration.

Démonstration du théorème. La solution de l'équation (4) s'écrit sous la forme

$$\varphi_1(t) = \varphi_1(0) + \omega_1 t, \qquad \varphi_2(t) = \varphi_2(0) + \omega_2(t). \tag{5}$$

Supposons que ω_1 et ω_2 sont rationnellement dépendants :

$$k_1\omega_1 + k_2\omega_2 = 0, \qquad k_1^2 + k_2^2 \neq 0.$$

Les équations en T

$$\omega_1 T = 2\pi k_2, \qquad \omega_2 T = -2\pi k_1$$

sont compatibles. Leur solution T n'est autre que la période de l'orbite fermée (5).

Supposons maintenant que ω_1 et ω_2 sont rationnellement indépendants. ω_1/ω_2 est alors un nombe irrationnel. Considérons les points d'intersection consécutifs de l'orbite (5) avec le méridien $\varphi_1 = 0 \pmod{2\pi}$ (fig. 178). Ces points auront pour latitude

$$\varphi_{2,k} = \varphi_{2,0} + 2\pi\frac{\omega_2}{\omega_1}k \pmod{2\pi}.$$

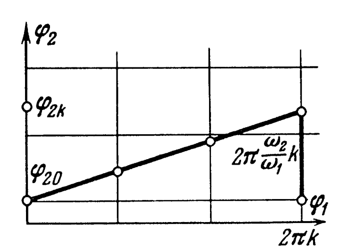


Fig. 178. Réduction du théorème au lemme

D'après le lemme, l'ensemble des points d'intersection est partout dense dans le méridien. Remarquons que si par les points d'un ensemble partout dense dans une droite d'un plan on mène des parallèles coplanaires et non confondues avec cette droite, on obtient un ensemble partout dense dans ce plan. Par conséquent, l'image

$$\tilde{\varphi}_1(t) = \varphi_1(t) - 2\pi\left[\frac{\varphi_1(t)}{2\pi}\right],$$

$$\tilde{\varphi}_2(t) = \varphi_2(t) - 2\pi\left[\frac{\varphi_2(t)}{2\pi}\right]$$

de l'orbite (5) est partout dense dans le carré

$$0 \leqslant \tilde{\varphi}_1 < 2\pi, \qquad 0 \leqslant \tilde{\varphi}_2 < 2.$$

Donc l'orbite de l'équation (4) (et par conséquent de l'équation (2)) est partout dense dans le tore.

4. Corollaires. Le théorème démontré possède plusieurs corollaires simples qui débordent du cadre de la théorie des équations différentielles ordinaires.

EXERCICE 1. Considérons la suite des premiers chiffres des puissances de 2 :

$$1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, 1, 2, 4, 8, \ldots$$

Cette suite contiendra-t-elle le chiffre 7 ? D'une façon générale 2^n commence-t-il par une combinaison de chiffres arbitraire donnée à l'avance ?

EXERCICE 2. Montrer que

$$\sup_{0<t<\infty} \cos t + \sin \sqrt{2}t = 2.$$

EXERCICE 3. Considérons le groupe S^1 des nombres complexes de module égal à 1. Trouver les sous-groupes fermés de S^1.

Réponse. 1, S^1, $\{\sqrt[n]{1}\}$.

5. Cas multidimensionnel. Supposons que les valeurs propres de l'équation (1) dans $\mathbf{R}^{2m}$ soient simples et de la forme

$$\lambda = \pm i\omega_1, \pm i\omega_2, \ldots, \pm i\omega_m.$$

Par un raisonnement identique à celui de l'exemple du point 2, on démontre que les orbites sont situées sur un tore de dimension m

$$T^m = S^1 \times \ldots \times S^1 = \{(\varphi_1, \ldots, \varphi_m) \bmod 2\pi\} \cong \mathbf{R}^m/\mathbf{Z}^m$$

et vérifient les équations

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_1, \quad \dot{\varphi}_2 = \omega_2, \ldots, \dot{\varphi}_m = \omega_m.$$

Les nombres $\omega_1, \ldots, \omega_m$ sont rationnellement indépendants si pour des k entiers on a

$$(k_1\omega_1 + \ldots + k_m\omega_m = 0) \Rightarrow (k_1 = \ldots = k_m = 0).$$

EXERCICE*. Montrer que si les fréquences $\omega_1, \ldots, \omega_m$ sont rationnellement indépendantes, toute orbite de l'équation (1) située sur le tore T^m est partout dense sur ce tore.

COROLLAIRE. *Supposons qu'un kangourou se déplace par bonds (de longueur $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{3}$) sur un champ* (fig. 179) *planté de maïs en rangs croisés et poquets. Il foulera alors nécessairement au moins un plant.*

6. Répartition uniforme. Les courbes partout denses que nous avons examinées plus haut jouissent de la remarquable propriété d'être uniformément réparties sur la surface des tores. Formulons le théorème correspondant dans le cas le plus simple. Soit $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ une suite de points du cercle $S^1 = \{\varphi \bmod 2\pi\}$. Cette suite est dite *uniformément répartie* (ou *équirépar-*

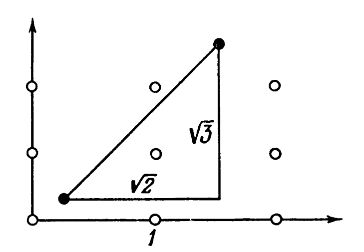


Fig. 179. L'orbite du système $\dot\varphi_1 = 1$, $\dot\varphi_2 = \sqrt{2}$, $\dot\varphi_3 = \sqrt{3}$ est partout dense sur le tore à trois dimensions

tie) si pour tout arc $\Delta \subset S^1$ le nombre $N(\Delta, k)$ des points du segment de la suite $(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$, portés par Δ, est asymptotiquement proportionnel à la longueur de Δ :

$$\lim_{k\to\infty} \frac{N(\Delta, k)}{k} = \frac{|\Delta|}{2\pi} .$$

EXERCICE* 1. Montrer que la suite $\varphi, \varphi + \alpha, \varphi + 2\alpha, \ldots$, où α est un angle incommensurable avec 2π, est équirépartie sur S^1.

COROLLAIRE. *Les nombres* 2^n *commencent plus souvent par* 7 *que par* 8. *Si* $N_7(k)$ *et* $N_8(k)$ *représentent la quantité de nombres* $(1, 2, 4, \ldots, 2^k)$ *commençant respectivement par* 7 *et par* 8, *il existe*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{N_7(k)}{N_8(k)} .$$

EXERCICE 2. Trouver cette limite et s'assurer qu'elle est > 1.

REMARQUE. Le segment initial de la suite (voir point 4) montre que les 7 sont apparemment moins nombreux. On doit cette circonstance à ce que le nombre irrationnel $\log_{10} 2 = 0{,}3010\ldots$ est très voisin du nombre rationnel 3/10 *).

§ 25. Cas de valeurs propres multiples

La résolution de l'équation linéaire à coefficients constants se ramène au calcul de la matrice e^{At}. Si les valeurs propres de la matrice A sont distinctes deux à deux, la forme explicite de la matrice e^{At} est donnée dans le § 19 (point 5) et le § 20 (point 6). Pour déterminer la forme explicite de la matrice e^{At} dans le cas de valeurs propres multiples, nous ferons appel à la forme normale de Jordan.

1. Calcul de e^{At} où A est un bloc de Jordan. Au § 14 on a indiqué une méthode de calcul de e^{At}, où A est un bloc de Jordan :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n ;$$

*) Les premiers chiffres des puissances de 3 et des populations des divers pays sont répartis suivant la même loi.

A est la matrice associée à l'opérateur de dérivation dans l'espace des λ-quasi-polynômes $e^{\lambda t}p_{<n}(t)$ $\left(\text{dans la base } e_k = \frac{t^k}{k!}e^{\lambda_k t},\ 0 \leqslant k < n\right)$. D'après la formule de Taylor, $H^s = e^{As}$ est la matrice associée à l'opérateur de translation $f(t) \mapsto f(t+s)$ dans la même base.

Un autre procédé de calcul repose sur le lemme suivant :

LEMME. *Soient A et B deux opérateurs linéaires dans $\mathbf{R}^n$. S'ils commutent, i.e. si $AB = BA$, alors $e^{A+B} = e^A e^B$.*

Démonstration. Comparons les séries formelles

$$e^A e^B = \left(E + A + \frac{A^2}{2} + \ldots\right)\left(E + B + \frac{B^2}{2} + \ldots\right) =$$
$$= E + (A + B) + \frac{1}{2}(A^2 + 2AB + B^2) + \ldots,$$
$$e^{A+B} = E + (A + B) + \frac{1}{2}(A + B)^2 + \ldots =$$
$$= E + (A + B) + \frac{1}{2}(A^2 + AB + BA + B^2) + \ldots$$

Si $AB = BA$, les séries se confondent (car $e^{x+y} = e^x e^y$ si x et $y \in \mathbf{R}$). Ces séries étant absolument convergentes, $e^A e^B = e^{A+B}$. C.Q.F.D.

Représentons A sous la forme $A = \lambda E + \Delta$, où Δ est un bloc de Jordan nilpotent :

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

λE commutant avec un opérateur quelconque, on a $e^{At} = e^{t(\lambda E + \Delta)} = e^{\lambda t}e^{\Delta t}$. Calculons la matrice

$$e^{\Delta t} = E + \Delta t + \frac{\Delta^2 t^2}{2} + \ldots + \frac{\Delta^{n-1}t^{n-1}}{(n-1)!} \quad (\Delta^n = 0).$$

Remarquons que Δ agit comme une translation sur la base $e_1, \ldots, e_n$: $0 \leftarrow e_1 \leftarrow e_2 \leftarrow \ldots \leftarrow e_n$. Donc Δ^k agit comme une k-translation et la matrice qui lui est associée est :

$$\begin{pmatrix} 0 & \ldots & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & & & \vdots \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Nous venons donc de démontrer le

THÉORÈME.

$$e^{\Delta t} = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & \dots & t^{n-1}/(n-1)! \\ & 1 & t & \dots & \vdots \\ & & 1 & \ddots & t^2/2 \\ & & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix},$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \dots & t^{n-1}e^{\lambda t}/(n-1)! \\ & e^{\lambda t} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & te^{\lambda t} \\ & & & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Nos calculs valent intégralement dans le cas complexe ($\lambda \in \mathbf{C}$, $A : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$).

2. Applications. De la formule (1) il vient aussitôt :

COROLLAIRE 1. *Soient $A : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ un opérateur linéaire ; $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ ses valeurs propres ; $\nu_1, \dots, \nu_k$ leurs multiplicités, $t \in \mathbf{R}$. Alors chaque élément de la matrice e^{At} (dans une base fixe quelconque) est une somme de λ_l-quasi-polynômes en t de degrés $< \nu_l$ ($l = 1, \dots, k$) respectivement.*

Démonstration. Considérons la matrice associée à l'opérateur e^{At} dans la base relativement à laquelle la matrice A est de la forme de Jordan. Notre assertion découle alors de (1). Les éléments de la matrice associée à l'opérateur e^{At} dans une autre base quelconque sont des combinaisons linéaires (à coefficients constants) des éléments de la matrice associée à l'opérateur e^{At} dans la base indiquée.

COROLLAIRE 2. *Soit φ une solution de l'équation différentielle*

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbf{C}^n, \quad A : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n.$$

Alors toute composante du vecteur φ (dans une base quelconque fixe) est une somme de λ_l-quasi-polynômes en t de degrés $< \nu_l$ respectivement :

$$\varphi_j(t) = \sum_{l=1}^{k} e^{\lambda_l t} p_{j,l}(t),$$

où $p_{j,l}$ est un polynôme de degré $< \nu_l$.

En effet, $\varphi(t) = e^{At}\varphi(0)$.

COROLLAIRE 3. *Soient $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ un opérateur linéaire ; λ_l ($1 \leqslant l < k$) ses valeurs propres réelles ; ν_l leurs multiplicités ; $\alpha_l \pm i\omega_l$ ($1 \leqslant l \leqslant m$) ses*

valeurs propres complexes ; μ_l leurs multiplicités. Tout élément de la matrice e^{At} et toute composante d'une solution de l'équation $\dot{x} = Ax$, $x \in \mathbf{R}^n$, sont une somme de λ_l-quasi-polynômes et de $\alpha_l \pm i\omega_l$-quasi-polynômes de degrés strictement inférieurs respectivement à ν_l et μ_l.

Cette somme peut être écrite sous une forme moins commode :

$$\varphi_j(t) = \sum_{l=1}^{k} e^{\lambda_l t} p_{j,\,l} + \sum_{l=1}^{m} e^{\alpha_l t}[q_{j,\,l}(t) \cos \omega_l t + r_{j,\,l}(t) \sin \omega_l t],$$

où p, q, r sont des polynômes à coefficients *réels* de degrés strictement inférieurs respectivement à ν_l, μ_l, μ_l.

En effet, si $z = x + iy$ et $\lambda = \alpha + i\omega$, on a

$$\operatorname{Re} ze^{\lambda t} = \operatorname{Re} e^{\alpha t}(x + iy)(\cos \omega t + i \sin \omega t) = e^{\alpha t}(x \cos \omega t - y \sin \omega t).$$

D'après ces formules on voit que si les parties réelles de toutes les valeurs propres sont strictement négatives, toutes les solutions tendent vers 0 lorsque $t \to +\infty$ (ce qui est naturel d'après les §§ 22 et 23).

3. Applications aux systèmes d'équations d'ordre $n > 1$. En écrivant notre système sous forme d'un système d'équations du premier ordre, nous ramenons notre problème à celui étudié plus haut, et nous pouvons le résoudre par une réduction de la matrice à la forme de Jordan. En fait il existe un procédé plus commode. Tout d'abord nous pouvons, sans en écrire la matrice, trouver les valeurs propres d'un système équivalent du premier ordre.

En effet, à une valeur propre λ est associé un vecteur propre et par conséquent une solution $\varphi(t) = e^{\lambda t}\varphi(0)$ du système équivalent du premier ordre. Par conséquent, le système de départ admet également une solution de la forme $\psi(t) = e^{\lambda t}\psi(0)$. Portons $\psi = e^{\lambda t}\xi$ dans le système de départ. Celui-ci admet une solution (non triviale) de cette forme si, et seulement si, λ satisfait à une équation algébrique qui nous donnera les valeurs propres λ_l.

Ces solutions pourront ensuite être cherchées sous forme d'une somme de λ_l-quasi-polynômes à coefficients indéterminés.

Exemple 1. $x^{\mathrm{IV}} = x$.
Substituons $x = e^{\lambda t}\xi$. On a $\lambda^4 e^{\lambda t}\xi = e^{\lambda t}\xi$, $\lambda^4 = 1$, $\lambda_{1,2,3,4} = 1, -1, i, -i$.
Toute solution de notre équation est donc de la forme

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t.$$

Exemple 2. $\ddot{x}_1 = x_2$, $\ddot{x}_2 = x_1$.
Substituons $x = e^{\lambda t}\xi$. On a $\lambda^2\xi_1 = \xi_2$, $\lambda^2\xi_2 = \xi_1$. Ce système d'équations linéaires en ξ_1, ξ_2 admet une solution non triviale si, et seulement si, $\lambda^4 = 1$. Toute solution de notre système est donc de la forme

$$x_1 = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t,$$
$$x_2 = D_1 e^t + D_2 e^{-t} + D_3 \cos t + D_4 \sin t.$$

En portant x_1 et x_2 dans le système on obtient

$$D_1 = C_1, \quad D_2 = C_2, \quad D_3 = -C_3, \quad D_4 = -C_4.$$

EXEMPLE 3. $x^{IV} - 2\ddot{x} + x = 0.$
Substituons $x = e^{\lambda t}\xi$. On a

$$\lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = 0, \quad \lambda^2 = 1, \quad \lambda_{1,2,3,4} = 1, 1, -1, -1.$$

Toute solution de l'équation initiale est donc de la forme

$$x = (C_1 t + C_2)e^{\lambda t} + (C_3 t + C_4)e^{-\lambda t}.$$

EXERCICE. Trouver la forme normale de Jordan de la matrice d'ordre 4 correspondant à notre équation.

4. Cas d'une seule équation d'ordre *n*. Remarquons que d'une façon générale la multiplicité des valeurs propres ne définit pas la dimension des blocs de Jordan. Le problème est simplifié lorsqu'il s'agit d'un opérateur linéaire A correspondant à une seule équation différentielle d'ordre n :

$$x^{(n)} = a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x, \quad a_k \in \mathbf{C}. \tag{2}$$

Du corollaire 2 du point 2 il vient

COROLLAIRE 4. *Toute solution de l'équation* (2) *est de la forme*

$$\varphi(t) = \sum_{l=1}^{k} e^{\lambda_l t} p_l(t), \tag{3}$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ *sont les racines de l'équation caractéristique*

$$\lambda^n = a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n, \tag{4}$$

et p_l *un polynôme de degré* $< \nu_l$ (*où* ν_l *est la multiplicité de la racine* λ_l).

En effet, l'équation (2) admet une solution de la forme $e^{\lambda t}(\xi)$ si, et seulement si, λ est racine de l'équation (4). Le corollaire (4) est ainsi démontré.

Passons au système équivalent d'équations du premier ordre :

$$\dot{x} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ a_n & & \dots & & a_1 \end{pmatrix}.$$

On a le

COROLLAIRE 5. *Si à un opérateur A dans $\mathbf{C}^n$ est associée une matrice de la forme* (5), *alors à chacune de ses valeurs propres λ correspond un bloc de Jordan et un seul d'ordre égal à la multiplicité de λ.*

En effet, d'après la formule (3), à chaque valeur propre λ correspond une seule direction propre. Soit en effet $\boldsymbol{\xi}$ un vecteur propre de l'opérateur A. Alors parmi les solutions de la forme (3) figure la première composante

$e^{\lambda t}\xi_0$ du vecteur $e^{\lambda t}\boldsymbol{\xi}$. Les autres composantes, elles, sont des dérivées : $\xi_k = \lambda^k \xi_0$. Par conséquent, λ définit d'une manière univoque le sens du vecteur $\boldsymbol{\xi}$.

Puisque chaque bloc de Jordan possède sa propre direction, le corollaire (5) est démontré.

EXERCICE. On demande si l'équation (2) admet pour solution toute combinaison linéaire des quasi-polynômes (3).

5. Sur les suites récurrentes. Les résultats obtenus en étudiant l'exponentielle e^{tA} d'exposant continu se transposent facilement à l'exponentielle d'exposant discret A^n. Nous sommes maintenant capables d'étudier n'importe quelle suite récurrente définie par la relation

$$x_n = a_1 x_{n-1} + \dots + a_k x_{n-k} \tag{6}$$

(par exemple la suite 0, 1, 2, 5, 12, 29, ... définie par la relation $x_n = 2x_{n-1} + x_{n-2}$ et la condition initiale $x_0 = 0, x_1 = 1$).

COROLLAIRE 6. *Le n-ième terme d'une suite récurrente dépend de n comme une somme de quasi-polynômes en n :*

$$x_n = \sum_{l=1}^{m} \lambda_l^n p_l(n),$$

où λ_l sont les valeurs propres de la matrice A correspondant à la suite, et p_l un polynôme de degré $< \nu_l$ (où ν_l est la multiplicité de λ_l).

Rappelons que la matrice A est la matrice associée à l'opérateur A dans $\mathbf{R}^k$, qui transforme un segment de longueur k de notre suite, $\boldsymbol{\xi}_{n-1} = (x_{n-k}, \dots, x_{n-1})$, en le segment suivant de longueur k, $\boldsymbol{\xi}_n = (x_{n-k+1}, \dots, x_n)$:

$$A\boldsymbol{\xi}_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ddots & & \\ & 0 & \ddots & 1 & \\ & & \ddots & 0 & 1 \\ a_k & & \dots & a_2 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-k} \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n-k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{\xi}_n .$$

Il est important de souligner que l'opérateur A ne dépend pas de n. C'est pourquoi x_n est une composante du vecteur $A^n\boldsymbol{\xi}$, où $\boldsymbol{\xi}$ est un vecteur constant. La matrice A est de la forme (5). Si l'on utilise le corollaire (5) et réduit la matrice A à la forme de Jordan, on obtient le corollaire 6.

Dans les calculs, point n'est besoin de transcrire la matrice, ni de la réduire à sa forme normale. Tout vecteur propre de l'opérateur A correspond à une solution de l'équation (6) de la forme $x = \lambda^n$. En portant cette valeur dans l'équation (6) on obtient pour λ l'équation

$$\lambda^k = a_1\lambda^{k-1} + \dots + a_k .$$

On s'assure facilement que c'est l'équation caractéristique de l'opérateur A.

EXEMPLE. Soit la suite 0, 1, 2, 5, 12, 29, ... ($x_n = 2x_{n-1} + x_{n-2}$). On a $\lambda^2 = 2\lambda + 1$, $\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$. Par conséquent la relation $x_n = 2x_{n-1} + x_{n-2}$ est vérifiée par les suites

$$x_n = (1 + \sqrt{2})^n \text{ et } x_n = (1 - \sqrt{2})^n$$

ainsi que par toutes leurs combinaisons linéaires (et elles seules)

$$x_n = c_1(1 + \sqrt{2})^n + c_2(1 - \sqrt{2})^n.$$

Parmi ces combinaisons il est facile d'en choisir une telle que $x_0 = 0, x_1 = 1$:

$$c_1 + c_2 = 0, \quad \sqrt{2}(c_1 - c_2) = 1.$$

Réponse. $x_n = \dfrac{(1 + \sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}} - \dfrac{(1 - \sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}$.

REMARQUE. Lorsque $n \to \infty$, le premier terme croît exponentiellement tandis que le second décroît exponentiellement. Aussi lorsque n est grand, a-t-on

$$x_n \approx \frac{(1 + \sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}$$

et, en particulier, $x_{n+1}/x_n \approx 1 + \sqrt{2}$. D'où nous tirons d'excellentes approximations pour $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2} \approx \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n}.$$

En substituant $x_n = 0, 1, 2, 5, 12, 29, \ldots$, on a

$$\sqrt{2} \approx \frac{1 - 0}{1} = 1 ; \qquad \sqrt{2} \approx \frac{5 - 2}{2} = 1{,}5 ;$$

$$\sqrt{2} \approx \frac{12 - 5}{5} = 1{,}4 ; \quad \sqrt{2} \approx \frac{29 - 12}{12} = \frac{17}{12} \approx 1{,}417\ldots$$

Ces mêmes approximations ont permis de calculer $\sqrt{2}$ dans l'antiquité ; on peut les obtenir encore en décomposant $\sqrt{2}$ en une fraction continue. Par ailleurs $(x_{n+1} - x_n)/x_n$ est la meilleure de toutes les approximations rationnelles de $\sqrt{2}$ dont le dénominateur est inférieur à x_n.

6. Oscillations de faible amplitude. Nous avons examiné plus haut le cas où à chaque racine de l'équation caractéristique, quelle que soit sa multiplicité, était associé un vecteur propre, i.e. celui d'une seule équation d'ordre n. Il existe un cas opposé dans un certain sens, où à chaque racine est associé un nombre de valeurs propres égal à la multiplicité de cette racine. C'est le cas des oscillations de faible amplitude d'un système mécanique conservatif.

Soit sur l'espace *euclidien* $\mathbf{R}^n$ une forme quadratique U définie par un opérateur symétrique A dans $\mathbf{R}^n$:

$$U(x) = \frac{1}{2}(Ax, x), \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n, \quad A' = A.$$

Considérons l'équation différentielle *)

$$\ddot{x} = -\mathbf{grad}\, U \tag{7}$$

(U est l'énergie potentielle).

Pour étudier l'équation (7), il est commode de s'imaginer une bille se déplaçant sur le graphique de l'énergie potentielle (comp. § 12).

L'équation (7) peut s'écrire sous la forme

$$\ddot{x} = -Ax$$

ou encore sous forme d'un système de n équations linéaires du deuxième ordre. Cherchons une solution $\varphi = e^{\lambda t}\xi$ par la méthode générale. On a

$$\lambda^2 e^{\lambda t}\xi = -Ae^{\lambda t}\xi, \quad (A + \lambda^2 E)\xi = 0, \quad \det|A + \lambda^2 E| = 0.$$

D'où nous tirons n valeurs réelles (pourquoi ?) pour λ^2 et $2n$ valeurs pour λ.

Si toutes ces valeurs sont distinctes, alors toute solution de l'équation (7) est une combinaison linéaire d'exponentielles. S'il existe des racines multiples, surgit alors le problème des blocs de Jordan.

THÉORÈME. *Si la forme quadratique U n'est pas dégénérée, à chaque valeur propre λ est associé un nombre de vecteurs propres linéairement indépendants égal à la multiplicité de cette racine, de sorte que toute solution de l'équation* (7) *peut être représentée comme une somme d'exponentielles* **) :

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{2n} e^{\lambda_k t}\xi_k, \quad \xi_k \in \mathbf{C}^n.$$

Démonstration. Par une transformation orthogonale on peut réduire la forme U à ses *axes principaux* : il existe une base orthonormée $e_1, \dots, e_n$ dans laquelle U s'écrit sous la forme

$$U(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k x_k^2, \; x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n.$$

---

*) Le champ de vecteurs **grad** U est défini par la condition « $dU(\xi) = (\mathbf{grad}\, U, \xi)$ pour tout vecteur $\xi \in T\mathbf{R}_x^n$ ». Les parenthèses signifient que le produit est scalaire. En coordonnées cartésiennes (orthonormées) le champ de vecteur **grad** U est défini par ses composantes $\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial U}{\partial x_n}\right)$.

**) Il est intéressant de noter que Lagrange qui le premier a étudié l'équation des petites oscillations (7) s'est trompé au départ en ce sens qu'il a jugé indispensable d'utiliser, en cas de racines multiples, les termes « séculaires » de la forme $te^{\lambda t}$ (respectivement $t \sin \omega t$ dans le cas réel) comme dans les points 2, 4, 5 du § 25.

Si la forme U n'est pas dégénérée, cela veut dire qu'aucun des nombres a_k n'est égal à 0. Dans les coordonnées choisies l'équation (7) s'écrit sous la forme

$$\ddot{x}_1 = -a_1 x_1, \quad \ddot{x}_2 = -a_2 x_2, \quad \ldots, \quad x_n = -a_n x_n$$

qu'il y ait des racines multiples ou non *). Notre système s'est décomposé en un produit direct de n « équations du pendule ». Chacune d'elles se résout immédiatement.

Si $a_k > 0$, on pose $a_k = \omega^2$ et $x_k = C_{1k} \cos \omega t + C_{2k} \sin \omega t$.

Si $a_k < 0$, on pose $a_k = -\alpha^2$ et $x_k = C_{1k} \operatorname{ch} \alpha t + C_{2k} \operatorname{sh} \alpha t = D_{1k} e^{\alpha t} + D_{2k} e^{-\alpha t}$.

Ces formules renferment en particulier l'assertion du théorème.

Si la forme U est définie positive, tous les a_k sont > 0 et le point $\boldsymbol{x}$ effectue n oscillations indépendantes dans n directions $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ mutuellement perpendiculaires (fig. 180). Ces oscillations sont dites *principales* ou *propres*, les nombres ω_k, les *fréquences propres*. Ils vérifient l'équation $\det |A - \omega^2 E| = 0$.

La trajectoire du point $\boldsymbol{x} = \varphi(t)$ dans l'espace de configuration $\mathbf{R}^n$ (où φ est une solution de l'équation (7)) est contenue dans le parallélépipède $|x_k| \leqslant X_k$, où X_k est l'amplitude de la k-ième oscillation propre. En particulier, lorsque $n = 2$, la trajectoire est contenue dans un rectangle.

Si les fréquences ω_1 et ω_2 sont commensurables, la trajectoire est une courbe fermée dans l'espace de configuration $\mathbf{R}^2$, appelée dans ce cas *courbe de Lissajous* (fig. 181).

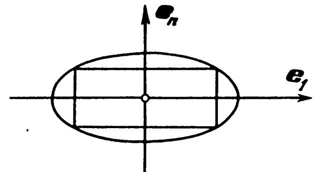


Fig. 180. Directions des oscillations propres et ligne de niveau de l'énergie potentielle

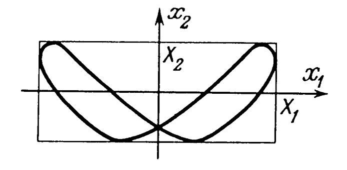


Fig. 181. Une courbe de Lissajous avec $\omega_2 = 2\omega_1$

Si, par contre, ω_1 et ω_2 sont incommensurables, la trajectoire est partout dense dans le rectangle. Cette circonstance découle du théorème du § 24.

EXERCICE 1. Représenter les courbes de Lissajous pour $\omega_1 = 1, \omega_2 = 3$ et $\omega_1 = 2, \omega_2 = 3$.

---

*) Observons que l'orthonormalité de la base e_k est essentielle, sinon les composantes du vecteur $\mathbf{grad}\,\frac{1}{2} \sum a_k x_k^2$ *ne seraient pas égales* à $a_k x_k$.

EXERCICE 2. Montrer que parmi les courbes de Lissajous avec $\omega_2 = n\omega_1$ figure le graphique du polynôme de degré n, appelé *polynôme de Tchébychev* :

$$T_n(x) = \cos n \operatorname{Arc} \cos x.$$

EXERCICE 3. Quelle est l'allure des trajectoires $x = \varphi(t)$ lorsque $U = x_1^2 - x_2^2$?

EXERCICE 4. Pour quelles valeurs de U la position d'équilibre $x = \dot{x} = 0$ de l'équation (7) est-elle stable a) au sens de Liapounov ? b) asymptotiquement ?

§ 26. Sur les quasi-polynômes

La résolution des équations linéaires à coefficients constants nous met constamment en présence des quasi-polynômes. Nous allons tirer au clair la cause de ce phénomène, et, par la même occasion, en indiquer quelques nouvelles applications.

1. Espace vectoriel de fonctions. Soit F l'ensemble de toutes les fonctions indéfiniment différentiables sur l'axe réel $\mathbf{R}$, à valeurs complexes.

L'ensemble F est muni d'une structure naturelle d'espace vectoriel complexe : si f_1 et f_2 sont des fonctions de F, il en est de même de $c_1 f_1 + c_2 f_2$ (c_1, c_2 étant des constantes de $\mathbf{C}$).

DÉFINITION. Des fonctions $f_1, \ldots, f_n \in F$ sont dites *linéairement indépendantes* si

$$(c_1 f_1 + \ldots + c_n f_n \equiv 0) \Rightarrow (c_1 = \ldots = c_n = 0),$$

où $c_1, \ldots, c_n \in \mathbf{C}$.

EXERCICE 1. Pour quelles valeurs de α, β les fonctions $\sin \alpha t$ et $\sin \beta t$ sont-elles linéairement dépendantes ?

EXERCICE 2. Montrer que les fonctions $e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}$ sont linéairement indépendantes si les λ_k sont distincts deux à deux.

Nota. Cela découle de l'existence d'une équation linéaire d'ordre n admettant pour solutions $e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}$ (voir point 2).

Parmi les éléments de l'espace F figurent des λ-quasi-polynômes

$$f(t) = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{\nu-1} c_k t^k$$

et, d'une façon plus générale, des sommes finies de λ_l-quasi-polynômes

$$f(t) = \sum_{l=1}^{k} e^{\lambda_l t} \sum_{m=0}^{\nu_l - 1} c_{l,m} t^m, \quad \lambda_i \neq \lambda_j. \tag{1}$$

EXERCICE 3. Montrer que toute fonction de la forme (1) s'écrit d'une manière et d'une seule sous forme de la somme (1). Autrement dit :

Si la somme (1) *est nulle, les coefficients* $c_{l,m}$ *sont nuls.*

Nota. Voir une solution éventuelle au point 2 (consulter le corollaire de la page 229).

2. Espace vectoriel des solutions d'une équation linéaire.

THÉORÈME. *L'ensemble X des solutions de l'équation linéaire*

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = 0 \tag{2}$$

forme dans F un sous-espace vectoriel de dimension finie n.

Démonstration. Soit $D : F \to F$ l'opérateur qui à toute fonction fait correspondre sa dérivée. L'opérateur D est linéaire :

$$D(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 Df_1 + c_2 Df_2.$$

Considérons le polynôme en D :

$$A = a(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_n E.$$

L'opérateur A est un opérateur linéaire dans F. Les solutions *) de l'équation (2) sont les éléments du noyau de cet opérateur. Ainsi $X = \operatorname{Ker} A$.

Or le noyau Ker A d'un opérateur linéaire est un espace vectoriel. Donc X est un espace vectoriel. Montrons que X est isomorphe à $\mathbf{C}^n$.

Soit $\varphi \in X$. Associons à φ une collection de n nombres, plus précisément les valeurs au point $t = 0$ de la fonction φ et de ses dérivées $\varphi_0 = (\varphi(0), (D\varphi)(0), \dots, (D^{n-1}\varphi)(0))$. Nous obtenons une application B de X dans $\mathbf{C}^n$ telle que $B(\varphi) = \varphi_0$. Cette application est linéaire. L'image de X par l'application B est l'espace $\mathbf{C}^n$ tout entier, car, d'après le théorème d'existence, il existe une solution $\varphi \in X$ quelles que soient les conditions initiales φ_0.

Le noyau de l'application B est nul, car, d'après le théorème d'unicité, les conditions initiales $\varphi_0 = 0$ déterminent univoquement la solution ($\varphi \equiv 0$). Donc B est un isomorphisme.

Le théorème est démontré.

COROLLAIRE. *Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les racines de l'équation caractéristique $a(\lambda) = 0$ de l'équation différentielle* (2) *et $\nu_1, \dots, \nu_k$ leurs multiplicités. Alors toute solution de l'équation* (2) *s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme* (1) *et toute somme de quasi-polynômes de la forme* (1) *vérifie l'équation* (2).

Démonstration. La formule (1) définit une application $\Phi : \mathbf{C}^n \to F$, associant à la fonction f une collection de n coefficients $c_{l,m}$. Cette application est linéaire. L'image de $\mathbf{C}^n$ par Φ renferme l'espace X des solutions de l'équation (2). En effet, d'après le § 25, toute solution de

---

*) Nous savons quelles solutions de l'équation (2) sont indéfiniment différentiables, i.e. appartiennent à F (voir § 25, pt. 4).

l'équation (2) s'écrit sous la forme (1). En vertu du théorème précédent la dimension de l'espace X est égale à n.

Une application linéaire de l'espace $\mathbf{C}^n$ dans un espace X de la même dimension est un isomorphisme. Donc Φ réalise un isomorphisme entre $\mathbf{C}^n$ et X. C.Q.F.D.

3. Invariance par les translations.

THÉORÈME. *L'espace X des solutions de l'équation différentielle* (2) *est invariant par les translations transformant une fonction $\varphi(t)$ en la fonction $\varphi(t + s)$.*

En effet la translatée d'une solution est également solution comme pour toute équation autonome (cf. § 10).

Exemples de sous-espaces de l'espace F, invariants par les translations :

EXEMPLE 1. L'espace à une dimension $\{ce^{\lambda t}\}$.

EXEMPLE 2. L'espace à n dimensions des λ-quasi-polynômes

$$\{e^{\lambda t} p_{<n}(t)\}.$$

EXEMPLE 3. Le plan

$$\{c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t\}.$$

EXEMPLE 4. L'espace à $2n$ dimensions

$$\{p_{<n}(t) \cos \omega t + q_{<n}(t) \sin \omega t\}.$$

On démontre que tout sous-espace fini de l'espace F, invariant par les translations, est l'espace des solutions d'une équation différentielle de la forme (2).

En d'autres termes, un tel sous-espace se décompose toujours en une somme directe d'espaces de quasi-polynômes. D'où l'importance des quasi-polynômes dans la théorie des équations linéaires à coefficients constants.

Si une équation quelconque est invariante par un groupe quelconque de transformations, alors les espaces de fonctions invariants par ce groupe joueront un rôle primordial dans la résolution de cette équation. C'est ainsi que diverses fonctions spéciales font leur apparition en mathématiques. Le groupe de rotations de la sphère est, par exemple, lié aux fonctions sphériques qui sont des espaces finis de fonctions sur une sphère, invariants par les rotations.

EXERCICE*. Trouver les sous-espaces de dimension finie de l'espace des fonctions différentiables sur le cercle, invariants par les rotations du cercle.

4. Remarque. La théorie des équations différentielles linéaires à coefficients constants fut élaborée par Euler et Lagrange bien avant la forme normale de Jordan des matrices.

Ces mathématiciens ont tenu le raisonnement suivant. Soient λ_1, λ_2 deux racines de l'équation caractéristique. A ces racines correspondent les solutions $e^{\lambda_1 t}$, $e^{\lambda_2 t}$ qui, dans l'espace F, engendrent le plan $\{c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}\}$ (fig. 182). Supposons maintenant que l'équation varie d'une façon telle que λ_2 tende vers λ_1. Alors $e^{\lambda_2 t}$ tend vers $e^{\lambda_1 t}$ et, à la limite, le plan dégénère en une droite.

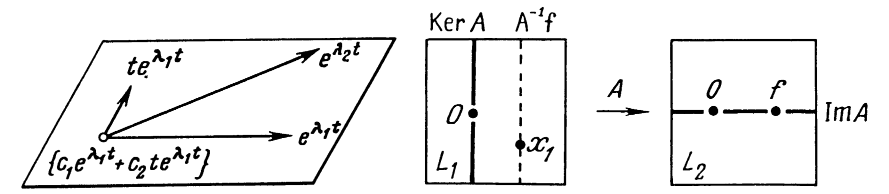


Fig. 182. Position limite du plan engendré par $e^{\lambda_1 t}$ et $e^{\lambda_2 t}$ dans l'espace F

Fig. 183. Noyau et image de l'opérateur A

Une question se pose : existe-t-il une position limite pour le plan lorsque $\lambda_2 \to \lambda_1$?

Au lieu de $e^{\lambda_1 t}$ et $e^{\lambda_2 t}$ on peut, lorsque $\lambda_2 \neq \lambda_1$, prendre pour base $e^{\lambda_1 t}$ et $e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}$. Or $e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t} \approx (\lambda_2 - \lambda_1) te^{\lambda_1 t}$. La base de notre plan $(e^{\lambda_1 t}$, $(e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t})/(\lambda_2 - \lambda_1))$ se transforme en la base $(e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t})$ du plan limite lorsque $\lambda_2 \to \lambda_1$. Par conséquent, il est logique de s'attendre à ce que les solutions de l'équation limite (avec la racine multiple $\lambda_2 = \lambda_1$) soient contenues dans le plan limite $\{c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 te^{\lambda_1 t}\}$. Une fois la formule établie, on peut la vérifier par une substitution dans l'équation.

De la même façon on explique l'apparition des solutions $t^k e^{\lambda t}$ $(k < \nu)$ dans le cas d'une racine de multiplicité ν.

Les raisonnements précédents peuvent avoir la rigueur voulue (si l'on se réfère par exemple au théorème de différentiabilité des solutions par rapport au paramètre).

5. Equations non homogènes. Soit $A : L_1 \to L_2$ un opérateur linéaire. On appelle solution d'une équation non homogène

$$Ax = f$$

de second membre f toute contre-image $x \in L_1$ de l'élément $f \in L_2$ (fig. 183).

Toute solution de cette équation est la somme d'une solution particulière x_1 et de la solution générale de l'équation homogène $Ax = 0$:

$$A^{-1}f = x_1 + \operatorname{Ker} A.$$

L'équation non homogène est résoluble si f appartient à l'espace vectoriel $\operatorname{Im} A = A(L_1) \subseteq L_2$.

Considérons en particulier l'équation différentielle

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_n x = f(t) \qquad (3)$$

(appelée *équation différentielle linéaire et non homogène d'ordre n à coefficients constants*).

THÉORÈME. *Si le second membre $f(t)$ de l'équation* (3) *est une somme de λ-quasi-polynômes, alors toute solution de l'équation* (3) *est une somme de λ-quasi-polynômes.*

Considérons l'espace $\mathbf{C}^m$ des λ-quasi-polynômes

$$\mathbf{C}^m = \{e^{\lambda t} p_{<m}(t)\}$$

de degré $<m$. L'opérateur linéaire D (qui transforme toute fonction en sa dérivée) applique $\mathbf{C}^m$ sur lui-même. Par conséquent l'opérateur

$$A = a(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_n E : \mathbf{C}^m \to \mathbf{C}^m$$

est également un opérateur linéaire de $\mathbf{C}^m$ sur lui-même. Nous pouvons désormais représenter l'équation (3) sous la forme $Ax = f$. Pour s'assurer qu'elle est résoluble il faut trouver l'image $\operatorname{Im} A = A(\mathbf{C}^m)$ de l'application A.

LEMME 1. *Supposons que λ ne soit pas racine de l'équation caractéristique, i.e. $a(\lambda) \neq 0$. Alors l'application $A : \mathbf{C}^m \to \mathbf{C}^m$ est un isomorphisme.*

Démonstration. La matrice associée à l'opérateur $D : \mathbf{C}^m \to \mathbf{C}^m$, dans une base convenable, est un bloc de Jordan d'élément diagonal λ. Dans la même base, l'opérateur A est représenté par une matrice trigonale dont les éléments diagonaux sont $a(\lambda)$. Donc, $\det A = (a(\lambda))^m \neq 0$ et A est un isomorphisme.

COROLLAIRE. *Si λ n'est pas une racine de l'équation caractéristique, alors l'équation* (3) *dont le second membre est un λ-quasi-polynôme de degré $<m$ admet une solution particulière sous forme d'un λ-quasi-polynôme de degré $<m$.*

LEMME 2. *Si λ est une racine de l'équation caractéristique de multiplicité ν, i.e. si*

$$a(z) = (z - \lambda)^\nu b(z), \qquad b(\lambda) \neq 0,$$

alors

$$A\mathbf{C}^m = \mathbf{C}^{m-\nu}.$$

Démonstration. $A = a(D) = (D - \lambda E)^\nu b(D)$. D'après le lemme 1 l'application $b(D) : \mathbf{C}^m \to \mathbf{C}^m$ est un isomorphisme. Il nous reste donc à démontrer que $(D - \lambda E)^\nu \mathbf{C}^m = \mathbf{C}^{m-\nu}$. Or la matrice associée à l'opérateur $D - \lambda E$ est un bloc de Jordan nilpotent dans la base

$$e_k = \frac{t_k}{k!} e^{\lambda t}, \qquad 0 \leqslant k < m,$$

i.e. cet opérateur agit sur cette base comme une translation :

$$0 \leftarrow e_0 \leftarrow e_1 \leftarrow \dots \leftarrow e_{m-1}.$$

L'opérateur $(D - \lambda E)^\nu$ agit comme une ν-translation et applique $\mathbf{C}^m$ sur $\mathbf{C}^{m-\nu}$.

COROLLAIRE. *Soit λ une racine de multiplicité ν de l'équation caractéristique $a(\lambda) = 0$. Si $f \in \mathbf{C}^k$ est un λ-quasi-polynôme de degré $<k$, l'équation* (3) *admet une solution $\varphi \in \mathbf{C}^{k+\nu}$ sous forme d'un λ-quasi-polynôme de degré $<k + \nu$.*

Pour la démonstration il faut poser $m = k + \nu$ dans le lemme 2.

Démonstration du théorème. Soit Σ l'ensemble de toutes les sommes de quasi-polynômes. Cet ensemble est un sous-espace vectoriel de dimension infinie de l'espace F. D'après le corollaire précédent l'image $A(\Sigma)$ de l'opérateur

$$A = a(D) : \Sigma \to \Sigma$$

contient tous les quasi-polynômes. Puisque $A(\Sigma)$ est un espace vectoriel, il coïncide avec Σ. L'équation (3) admet donc une solution particulière, somme de quasí-polynômes. Il nous reste à lui ajouter la solution générale de l'équation homogène, qui, elle, est une somme de quasi-polynômes en vertu du § 25. C.Q.F.D.

REMARQUE 1. *Si $f = e^{\lambda t} p_{<k}(t)$, l'équation* (3) *admet une solution particulière de la forme $\varphi = t^\nu e^{\lambda t} q_{<k}(t)$.*

En effet, d'après le lemme 2, il existe une solution particulière sous forme d'un quasi-polynôme de degré $<k + \nu$; or les termes de degré $<\nu$ vérifient l'équation homogène (voir corollaire pt. 2), donc on peut les négliger.

REMARQUE 2. *Si l'équation* (3) *et λ sont réels, on peut chercher la solution sous forme d'un quasi-polynôme réel. Si par contre $\lambda = \alpha \pm i\omega$, on cherchera alors la solution sous la forme*

$$e^{\alpha t}(p(t) \cos \omega t + q(t) \sin \omega t).$$

Cela étant, le sinus peut figurer dans la formule de la solution, même si le second membre ne renferme qu'un cosinus.

EXERCICE. Sous quelle forme peut-on écrire les solutions particulières des 13 équations suivantes :

1, 2) $\ddot{x} \pm x = t^2$; 3, 4) $\ddot{x} \pm x = e^{2t}$;

5, 6) $\ddot{x} \pm x = te^{-t}$; 7, 8) $\ddot{x} \pm x = t^3 \sin t$;

9, 10) $\ddot{x} \pm x = te^t \cos t$; 11, 12) $\ddot{x} \pm 2ix = t^2 e^t \sin t$;

13) $x^{\mathrm{IV}} + 4x = t^2 e^t \cos t$?

6. Méthode des amplitudes complexes. Lorsque les racines sont complexes, on opte en général pour le procédé de résolution suivant.

Supposons que l'équation (3) soit réelle et que la fonction $f(t)$ soit représentée comme la partie réelle d'une fonction complexe : $f(t) = \text{Re}\, F(t)$. Soit Φ une solution complexe de l'équation $a(D)\Phi = F$. On vérifie facilement que $a(D)\varphi = f$, où $\varphi = \text{Re}\, \Phi$ (puisque $a = \text{Re}\, a$).

Donc, *pour résoudre une équation linéaire réelle non homogène dont le second membre est f, il suffit de traiter f comme la partie réelle d'une fonction complexe F, de résoudre cette équation avec F pour second membre et de prendre la partie réelle de la solution trouvée.*

Exemple 1. Supposons que $f(t) = \cos \omega t = \text{Re}\, e^{i\omega t}$. Le quasi-polynôme $F(t) = e^{i\omega t}$ étant de degré nul, on peut chercher la solution Φ sous la forme $Ct^{\nu} e^{i\omega t}$, où C est une constante complexe (qu'on appelle *amplitude complexe*), ν la multiplicité de la racine $i\omega$. Finalement

$$\varphi(t) = \text{Re}\, (Ct^{\nu} e^{i\omega t}).$$

Si $C = re^{i\theta}$, alors

$$\varphi(t) = rt^{\nu} \cos (\omega t + \theta).$$

Par conséquent, l'amplitude complexe C nous renseigne sur l'amplitude (r) et sur la phase (θ) de la solution réelle.

Exemple 2. Soit un pendule (fig. 184) (ou un tout autre système linéaire oscillatoire, par exemple, un corps soutenu par un ressort ou un circuit électrique oscillant) soumis à l'action d'une force extérieure périodique :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f(t), \quad f(t) = \cos \nu t = \text{Re}\, e^{i\nu t}.$$

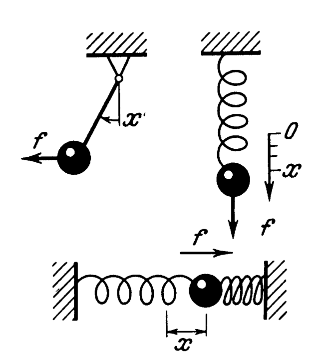


Fig. 184. Système oscillant sous l'action de la force extérieure $f(t) = \cos \nu t$

L'équation caractéristique $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ admet pour racines $\lambda = \pm i\omega$. Si $\nu^2 \neq \omega^2$, il importe de chercher une solution particulière sous la forme $\Phi = Ce^{i\nu t}$. En portant dans l'équation on a

$$C = \frac{1}{\omega^2 - \nu^2}. \tag{4}$$

La quantité C peut être écrite sous la forme trigonométrique $C = r(\nu)e^{i\theta(\nu)}$.

D'après la formule (4) l'amplitude r et la phase θ prennent les valeurs *) indiquées sur la figure 185. La partie réelle de Φ est égale à $r \cos(\nu t + \theta)$. Donc, la solution générale de l'équation non homogène est de la forme

$$x = r \cos(\nu t + \theta) + C_1 \cos(\omega t + \theta_1),$$

où C_1 et θ_1 sont des constantes arbitraires.

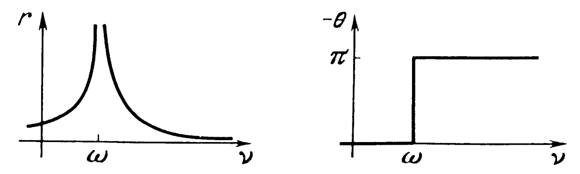


Fig. 185. Amplitude et phase des oscillations d'un pendule sans frottement en fonction de la fréquence de la force extérieure

Par conséquent, *sous l'action d'une force extérieure les oscillations du pendule sont composées d'une « oscillation forcée »* $r \cos(\nu t + \theta)$ *de fréquence égale à celle de la force extérieure et d'une « oscillation libre » de fréquence propre* ω.

La dépendance de l'amplitude r de l'oscillation forcée par rapport à la fréquence de la force extérieure ν présente un caractère de résonance : plus la fréquence de la force extérieure ν est proche de la fréquence propre ω, plus le système oscille fortement.

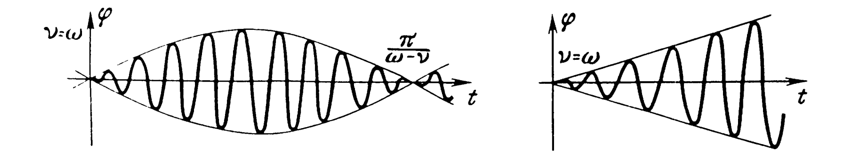


Fig. 186. Somme de deux harmoniques de fréquences voisines (battements) et limite de cette somme en cas de résonance (amplification)

Le phénomène de résonance que l'on observe lorsque la fréquence de la force extérieure coïncide avec la fréquence propre du système oscillatoire est d'une grande importance dans les applications. Ainsi dans toute construction (édifice, avion, bateau, etc.) on doit veiller à ce que ses fréquences propres n'approchent pas de celles des forces extérieures auxquelles elle est

*) Le choix de $\theta = -\pi$ (au lieu de $+\pi$), lorsque $\nu > \omega$, sera justifié plus bas, par l'exemple 3.

susceptible d'être soumise. Autrement une force, même faible, d'effet durable pourrait l'ébranler et la faire écrouler.

La phase des oscillations forcées θ varie par sauts de $-\pi$ lorsque ν passe par la valeur résonante ω. Lorsque ν est proche de ω, on observe des « battements » (fig. 186) : tantôt l'amplitude des oscillations croît (tant que le rapport des phases du pendule et de la force extérieure est tel que la force extérieure fait osciller le pendule en lui communiquant sa propre énergie), tantôt elle décroît (lorsque le rapport des phases varie de telle sorte que la force extérieure amortisse les oscillations du pendule).

Plus les fréquences ν et ω sont voisines, plus le rapport des phases varie lentement, et plus est grande la période des battements. Lorsque $\nu \to \omega$, la période des battements tend vers l'infini.

En cas de résonance ($\nu = \omega$) le rapport des phases est constant et les oscillations forcées peuvent croître indéfiniment (fig. 186).

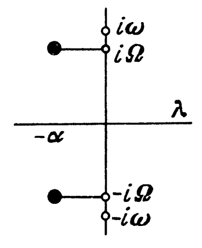
Utilisons en effet la méthode générale pour chercher une solution particulière sous la forme $x = \operatorname{Re} Cte^{i\omega t}$ lorsque $\nu = \omega$. En portant dans l'équation il vient $C = 1/(2i\omega)$, d'où $x = \dfrac{t}{2\omega} \sin \omega t$ (fig. 186). Les oscillations forcées croissent indéfiniment.

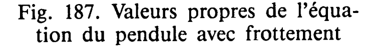
Exemple 3. Considérons l'équation du pendule en présence de frottement

$$\ddot{x} + k\dot{x} + \omega^2 x = f(t).$$

L'équation caractéristique $\lambda^2 + k\lambda + \omega^2 = 0$ possède les racines (fig. 187)

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm i\Omega, \quad \text{où} \quad \alpha = \frac{k}{2}, \Omega = \sqrt{\omega^2 - \frac{k^2}{4}}.$$




Fig. 187. Valeurs propres de l'équation du pendule avec frottement

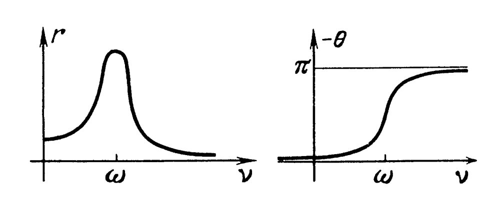


Fig. 188. Amplitude et phase des oscillations forcées du pendule avec frottement en fonction de la fréquence de la force extérieure

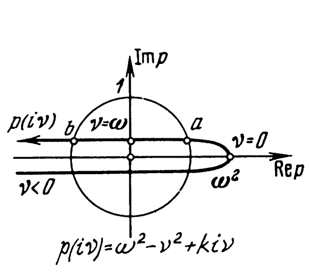
Supposons que le coefficient de frottement k est >0 et relativement petit ($k^2 < 4\omega^2$). Considérons la force extérieure harmonique $f(t) = \cos \nu t = \operatorname{Re} e^{i\nu t}$. Si le coefficient de frottement k est non nul, $i\nu$ ne peut être

racine de l'équation caractéristique (car $\lambda_{1,2}$ possèdent des parties réelles non nulles). Il faut donc chercher la solution sous la forme $x = \operatorname{Re} Ce^{i\nu t}$. En substituant dans l'équation il vient

$$C = \frac{1}{\omega^2 - \nu^2 + ki\nu}. \qquad (5)$$

Ecrivons C sous la forme trigonométrique : $C = re^{i\theta}$. La figure 188 représente l'amplitude r et la phase θ des oscillations forcées en fonction de la fréquence de la force extérieure en vertu de la formule (5).

Ces graphiques sont construits de la manière suivante. Considérons le dénominateur de la fraction (5), i.e. la valeur du polynôme caractéristique p sur l'axe imaginaire. L'image $\nu \mapsto p(i\nu) = \omega^2 - \nu^2 + ki\nu$ s'appelle *courbe de Mikhaïlov*. On voit sur la formule (5) que cette courbe (dans le cas de notre équation) est une parabole qui est représentée sur la figure 189. Si le coefficient de frottement k est petit, la parabole est « proche » d'une demi-droite de l'axe réel parcourue deux fois.



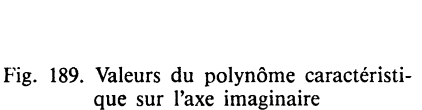


Fig. 189. Valeurs du polynôme caractéristique sur l'axe imaginaire

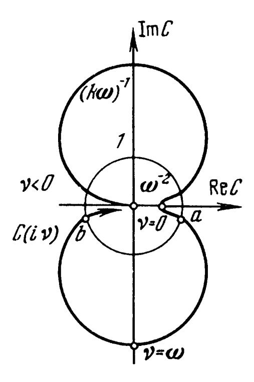


Fig. 190. Dépendance de l'amplitude complexe par rapport à la fréquence de la force extérieure

Il est maintenant aisé de construire l'image $\nu \mapsto C(\nu) = 1/p(i\nu)$, cette courbe s'appelle *caractéristique amplitude-phase*. On l'obtient à partir de la courbe de Mikhaïlov par le produit d'une inversion et d'une symétrie par rapport à l'axe réel. La partie de courbe de Mikhaïlov voisine de 0 est pratiquement indiscernable d'un couple de segments de droite et correspond à des voisinages des points ω et $-\omega$ de l'axe ν, dont les rayons sont de l'ordre de k. L'inversion envoie les droites dans des cercles, donc la caractéristique amplitude-phase est composée de deux portions proches de grands cercles (de diamètre $1/(k\omega)$) (fig. 190). Sur l'axe ν, ces cercles correspondent à de petits (de l'ordre de k) voisinages des valeurs résonantes ω et $-\omega$; la partie

restante de l'axe correspond à l'arc de courbe reliant ces cercles ainsi qu'aux arcs extrémités.

Cette étude de l'image $y \mapsto C(\nu)$ nous permet d'aborder sans peine celle de la dépendance du module et de l'argument de l'amplitude complexe C par rapport à ν : leurs graphiques sont représentés sur la figure 188.

La solution générale de l'équation non homogène

$$x = r \cos (\nu t + \theta) + C_1 e^{-\alpha t} \cos (\Omega t + \theta_1)$$

est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène $C_1 e^{-\alpha t} \cos (\Omega t + \theta_1)$.

Pour $t \to +\infty$ ce terme tend vers 0, de sorte qu'il ne reste qu'une seule oscillation forcée $x = r \cos (\nu t + \theta)$.

Etudions le comportement du pendule lorsque le coefficient de frottement est d'abord nul (fig. 185) et ensuite positif (fig. 188).

Nous remarquons qu'*un faible frottement exerce sur la résonance une influence telle que l'amplitude des oscillations croît non pas indéfiniment mais jusqu'à une valeur finie inversement proportionnelle au coefficient de frottement.*

En effet, au voisinage de $\nu = \omega$ la fonction $r(\nu)$ possède un maximum nettement prononcé (fig. 188). La formule (5) nous montre que lorsque k décroît, la hauteur de ce maximum croît comme $1/k\omega$.

D'un point de vue physique, la finitude de l'amplitude des oscillations forcées établies, lorsque le coefficient de frottement est non nul, est facile à prévoir par un calcul de la balance énergétique. Lorsque l'amplitude est grande, l'énergie communiquée au pendule par la force extérieure est inférieure à l'énergie absorbée par les frottements. Par conséquent, l'amplitude diminuera tant que ne s'établira pas un régime dans lequel la perte d'énergie due au frottement sera compensée par le travail de la force extérieure. L'amplitude des oscillations établies croît en raison inverse du coefficient de frottement lorsque ce dernier tend vers 0.

Le déphasage de θ est toujours négatif. Autrement dit, *les oscillations forcées retardent sur la force excitatrice.*

EXERCICE 1. Montrer que toute solution d'un système d'équations linéaires et non homogènes à coefficients constants et dont le second membre est une somme de quasi-polynômes à coefficients vectoriels

$$f = \sum_l e^{\lambda_l t} \sum_k c_{k,l} t^k$$

est une somme de quasi-polynômes à coefficients vectoriels.

EXERCICE 2. Montrer que toute solution d'une équation récurrente linéaire et non homogène dont le second membre est une somme de quasi-polynômes

$$x_n + a_1 x_{n-1} + \ldots + a_k x_{n-k} = f(n)$$

est une somme de quasi-polynômes. Trouver la formule du terme général de la suite 0, 2, 7, 18, 41, 88, ... ($x_n = 2x_{n-1} + n$).

7. Application aux calculs des oscillations faiblement non linéaires. Lorsqu'on veut établir comment une solution d'une équation varie en fonction de paramètres, on est souvent conduit à résoudre des équations linéaires et non homogènes ou équations aux variations (voir § 3). En particulier, lorsque le système « non perturbé » est linéaire, le problème se ramène en général à la résolution d'équations linéaires dont le second membre est une somme d'exponentielles (ou de fonctions trigonométriques) ou de quasi-polynômes.

Exercice 1. Exprimer la période d'oscillations du pendule d'équation $\ddot{x} = -\sin x$ en fonction de l'amplitude A en admettant que cette dernière est petite.

Réponse. $T = 2\pi\left(1 + \frac{A^2}{16} + O(A^4)\right)$.

Lorsque l'angle d'écart est par exemple égal à 30°, la période est de 2 % supérieure à celle des petites oscillations.

Solution. Traitons la solution de l'équation du pendule qui vérifie la condition initiale $x(0) = A$, $\dot{x}(0) = 0$ comme une fonction de A.

D'après le théorème de différentiabilité par rapport aux conditions initiales, cette fonction est différentiable. Développons-la en série de Taylor suivant les puissances de A, au voisinage de $A = 0$:

$$x = Ax_1(t) + A^2x_2(t) + A^3x_3(t) + O(A^4).$$

Alors

$$\dot{x} = A\dot{x}_1 + A^2\dot{x}_2 + A^3\dot{x}_3 + O(A^4),$$

$$\ddot{x} = A\ddot{x}_1 + A^2\ddot{x}_2 + A^3\ddot{x}_3 + O(A^4),$$

$$\sin x = Ax_1 + A^2x_2 + A^3\left(x_3 - \frac{1}{6}x_1^3\right) + O(A^4).$$

L'équation $\ddot{x} = -\sin x$ est vérifiée quel que soit A. Il en découle les équations pour x_1, x_2, x_3 :

$$\ddot{x}_1 = -x_1, \ddot{x}_2 = -x_2, \ddot{x}_3 = -x_3 + \frac{1}{6}x_1^3. \tag{6}$$

La condition initiale $x(0) = A$, $\dot{x}(0) = 0$ est réalisée quel que soit A. Il s'ensuit les conditions initiales pour l'équation (6) :

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = x_3(0) = \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = \dot{x}_3(0) = 0. \tag{7}$$

La résolution de l'équation (6) avec les conditions initiales (7) donne

$$x_1 = \cos t, \quad x_2 = 0.$$

Pour x_3 on obtient l'équation

$$\ddot{x}_3 + x_3 = \frac{1}{6}\cos^3 t, \quad x_3(0) = \dot{x}_3(0) = 0.$$

En résolvant cette équation (par la méthode des amplitudes complexes par exemple) il vient

$$x_3 = \alpha(\cos t - \cos 3t) + \beta t \sin t,$$

où $\alpha = 1/192$, $\beta = 1/16$.

Donc, la non-linéarité ($\sin x \neq x$) des oscillations du pendule se traduit *) par l'adjonction du terme $A^3 x_3 + O(A^4)$:

$$x = A \cos t + A^3[\alpha(\cos t - \cos 3t) + \beta t \sin t] + O(A^4).$$

La période des oscillations T est, comme le maximum de $x(t)$, proche de 2π lorsque A est petit. On la tire de la condition $\dot{x}(T) = 0$, i.e.

$$A\{-\sin t + A^2[(\beta - \alpha) \sin T + 3\alpha \sin 3T + \beta T \cos T] + O(A^3)\} = 0.$$

Résolvons cette équation approximativement pour de petits A. Posons $T = 2\pi + u$. Nous obtenons l'équation suivante en u :

$$\sin u = A^2[2\pi\beta + O(u)] + O(A^3).$$

D'après le théorème des fonctions implicites

$$u = 2\pi\beta A^2 + O(A^3),$$

i.e. $T = 2\pi\left(1 + \frac{A^2}{16} + o(A^2)\right)$. Puisque $T(A)$ est pair, on a $o(A^2) = O(A^4)$.

EXERCICE 2. Soit l'équation

$$\ddot{x} + \omega^2 x + ax^2 + bx^3 = 0.$$

Exprimer la période des oscillations en fonction de l'amplitude A.

Réponse. $T = \frac{2\pi}{\omega}\left[1 + \left(\frac{5a^2}{12\omega^4} - \frac{3b}{8\omega^2}\right)A^2 + o(A^2)\right]$.

EXERCICE 3. Etablir le même résultat au moyen de la formule explicite de la période (§ 12, pt. 7).

§ 27. Equations linéaires non autonomes

La partie de la théorie des équations linéaires, qui ne dépend pas de l'invariance par les translations, se transpose facilement aux équations et aux systèmes linéaires à coeffficients variables.

DÉFINITION. On appelle *linéaire (homogène) à coefficients variables* **) l'équation

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad A(t) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n, \tag{1}$$

*) A ce sujet il est recommandé de se rappeler le problème du seau troué (voir l'avertissement du § 7, pt. 5) : à cause de l'apparition du terme « séculaire » $t \sin t$ dans la formule de x_3 il est risqué de faire toute sorte de conclusion quant au comportement du pendule lorsque $t \to \infty$. Notre approximation n'est valable que sur un intervalle de temps fini ; lorsque t est grand, le terme $O(A^4)$ est également grand. Et effectivement la véritable solution de l'équation des oscillations du pendule reste limitée (par A) quel que soit t comme il découle du principe de conservation de l'énergie.

**) Nous supposons que les coefficients sont réels. Le cas de coefficients complexes est analogue.

où t appartient à un intervalle I de l'axe réel. Cet intervalle peut couvrir l'axe $\mathbf{R}$ tout entier.

Géométriquement, les solutions de l'équation (1) sont représentées par des courbes intégrales dans la bande $I \times \mathbf{R}^n$ de l'espace des phases élargi (fig. 191). Comme d'habitude nous supposerons que la fonction $A(t)$ est différentiable *).

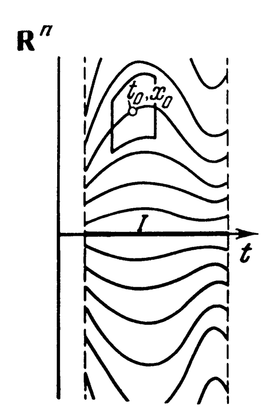


Fig. 191. Courbes intégrales de l'équation linéaire

Fig. 192. Balançoire

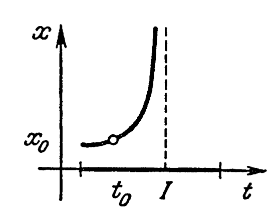


Fig. 193. Solution non prolongeable de l'équation $\dot{x} = x^2$

Exemple 1. Considérons l'équation du pendule $\ddot{x} = -\omega^2 x$. La fréquence ω dépend de la longueur du pendule. Les oscillations d'un pendule de longueur variable obéissent à une équation analogue

$$\ddot{x} = -\omega^2(t)x.$$

Cette équation peut se mettre sous la forme (1) :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\omega^2(t)x_1, \end{cases} \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme exemple de pendule de longueur variable citons la balançoire : en modifiant la position de son centre de gravité, la personne qui se balance fait varier périodiquement le paramètre ω (fig. 192).

2. Existence des solutions. L'équation (1) admet une solution immédiate : la solution nulle. Quelles que soient les conditions initiales $(t_0, x_0) \in I \times \mathbf{R}^n$, d'après les théorèmes genéraux du chapitre 2, il existe une

*) On aurait pu se contenter de la continuité de la fonction $A(t)$ (voir plus bas § 32, point 6, page 286).

solution définie dans un certain voisinage du point t_0. Lorsque l'équation est non linéaire, cette solution est susceptible de ne pas être prolongeable à l'intervalle I tout entier (fig. 193). Les équations linéaires ont ceci de particulier qu'il leur est impossible de s'éloigner à l'infini en un laps de temps fini.

THÉORÈME. *Toute solution de l'équation* (1) *est prolongeable à l'intervalle I tout entier.*

Lorsque l'équation est linéaire, $\|\dot{x}\| \leqslant C\|x\|$ et par conséquent toute solution croît moins vite que e^{Ct}.

On démontrerait soigneusement ce théorème par exemple de la façon suivante. Soit $[a, b]$ un intervalle compact de I. Alors la norme *) de l'opérateur $A(t)$ est majorée sur l'intervalle $[a, b]$:

$$\|A(t)\| < C = C(a, b).$$

Démontrons la majoration *a priori* suivante :

Si une solution φ *est définie sur un intervalle* $[t_0, t]$ $(a \leqslant t_0 \leqslant t \leqslant b)$ (fig. 194), alors

$$\|\varphi(t)\| \leqslant e^{C(t-t_0)}\|\varphi(t_0)\|. \tag{2}$$

Ceci est évident pour la solution nulle. Si $\varphi(t_0) \neq 0$, d'après le théorème d'unicité, $\varphi(\tau)$ ne s'annule pas. Posons $r(\tau) = \|\varphi(\tau)\|$. La fonction $L(\tau) = \ln r^2$ est définie pour $t_0 \leqslant \tau \leqslant t$.

Par hypothèse $\dot{L} \leqslant 2r\dot{r}/r^2 \leqslant 2C$. Donc $L(t) \leqslant L(t_0) + 2C(t - t_0)$. Ce qu'on voulait.

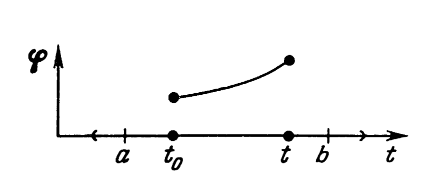


Fig. 194. Estimation *a priori* de la croissance d'une solution sur l'intervalle $[a, b]$

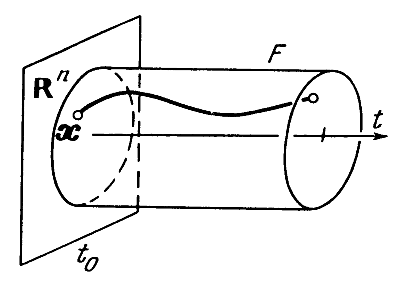


Fig. 195. Prolongement d'une solution jusqu'à $t = b$

Supposons maintenant que $\|x_0\|^2 = B > 0$. Dans l'espace des phases élargi (fig. 195), considérons le compact

$$F = \{t, x : a \leqslant t \leqslant b, \quad \|x\|^2 \leqslant 2Be^{2C(b-a)}\}.$$

D'après le théorème de prolongement, la solution vérifiant la condition initiale $\varphi(t_0) = x_0$ est prolongeable en avant jusqu'à la frontière du cylindre F. La frontière du cylindre F est constituée des sections $(t = a, t = b)$ et de la surface latérale $(\|x\|^2 = 2Be^{2C(b-a)})$. La solution ne peut accéder à la surface latérale car, en vertu de la majoration *a priori*,

$$\|\varphi(t)\| \leqslant Be^{2C(b-a)}.$$

---

*) Nous supposons que dans $\mathbf{R}^n$ a été choisie une métrique euclidienne quelconque.

La solution $\varphi(t)$ se prolonge donc à droite jusqu'à $t = b$. On démontrerait de la même manière qu'elle se prolonge à gauche jusqu'à $t = a$.

Ce qui achève la démonstration du théorème, puisque a et b ont été arbitrairement choisis.

3. Espace vectoriel des solutions. Soit X l'ensemble de toutes les solutions de l'équation (1), définies sur l'intervalle I tout entier. Les solutions étant des applications $\varphi : I \to \mathbf{R}^n$ à valeurs dans l'espace des phases vectoriel $\mathbf{R}^n$, on peut les additionner et les multiplier par des nombres :

$$(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2)(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t).$$

THÉORÈME. *L'ensemble X de toutes les solutions de l'équation* (1) *définies sur l'intervalle I est un espace vectoriel.*

Démonstration. Ceci est évident :

$$\frac{d}{dt}(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1\dot{\varphi}_1 + c_2\dot{\varphi}_2 = c_1A\varphi_1 + c_2A\varphi_2 = A(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2).$$

THÉORÈME. *L'espace vectoriel X des solutions d'une équation linéaire est isomorphe à l'espace des phases* $\mathbf{R}^n$ *de cette équation.*

Démonstration. Soit $t \in I$. Considérons l'application

$$B_t : X \to \mathbf{R}^n, \quad B_t\varphi = \varphi(t),$$

qui à chaque solution φ associe sa valeur à l'instant t.

L'application B_t est linéaire (car la valeur d'une somme de solutions est égale à la somme des valeurs de ces solutions). L'image de X par cette application est l'espace des phases $\mathbf{R}^n$ tout entier, car, d'après le théorème d'existence, quel que soit $x_0 \in \mathbf{R}^n$, il existe une solution φ vérifiant la condition initiale $\varphi(t_0) = x_0$. Le noyau de l'application B_t est nul, car la solution vérifiant la condition initiale $\varphi(t_0) = 0$ est identiquement nulle d'après le théorème d'unicité.

Par conséquent B_t est un *isomorphisme de X sur* $\mathbf{R}^n$. Nous avons établi là le résultat fondamental de la théorie des équations linéaires.

DÉFINITION. On appelle *système fondamental de solutions* de l'équation (1) une base de l'espace vectoriel des solutions X.

EXERCICE. Trouver un système fondamental de solutions de l'équation (1) où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Du théorème précédent il vient :

COROLLAIRE 1. *Toute équation* (1) *possède un système fondamental de n solutions* $\varphi_1, \dots, \varphi_n$.

COROLLAIRE 2. *Soit* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *un système fondamental. Toute solution de l'équation* (1) *est une combinaison linéaire des solutions de ce système fondamental.*

COROLLAIRE 3. *Toute famille de* $n + 1$ *solutions de l'équation* (1) *est linéairement dépendante.*

COROLLAIRE 4. *Les applications*

$$g_{t_0}^{t_1} = B_{t_1} B_{t_0}^{-1} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$$

pendant l'intervalle de temps (t_0, t_1) (fig. 196), *associées à l'équation* (1), *sont des isomorphismes linéaires.*

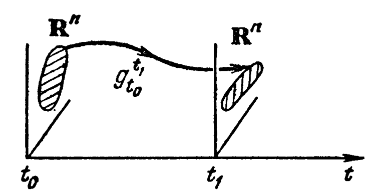


Fig. 196. Transformation linéaire de l'espace des phases par les solutions de l'équation linéaire dans l'intervalle de temps (t_0, t_1)

4. Wronskien. Soit $e_1, \ldots, e_n$ une base quelconque de l'espace des phases $\mathbf{R}^n$. Le choix d'une base fixe l'unité de volume et l'orientation de $\mathbf{R}^n$. Par conséquent, à chaque parallélépipède correspond un volume bien défini dans l'espace des phases.

Soient $\varphi_k : I \to \mathbf{R}^n$ $(k = 1, \ldots, n)$ des fonctions vectorielles.

DÉFINITION. On appelle *wronskien* du système de fonctions vectorielles φ_k la fonction numérique $W : I \to \mathbf{R}$ dont la valeur au point t est égale au volume (orienté) du parallélépipède construit sur les vecteurs $\varphi_1(t), \ldots$ $\ldots, \varphi_n(t) \in \mathbf{R}^n$

$$W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_{1,1}(t) & \ldots & \varphi_{n,1}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_{1,n}(t) & \ldots & \varphi_{n,n}(t) \end{vmatrix},$$

$$\varphi_k(t) = \varphi_{k,1}(t)e_1 + \ldots + \varphi_{k,n}(t)e_n.$$

Supposons en particulier que φ_k soient les solutions de l'équation (1). Leurs images par l'isomorphisme B_t défini plus haut sont des vecteurs $\varphi_k(t)$ de l'espace des phases $\mathbf{R}^n$. Ces derniers sont linéairement dépendants si, et seulement si, le wronskien s'annule au point t. D'où le

COROLLAIRE 5. *Un système de solutions* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *de l'équation* (1) *est un système fondamental si, et seulement si, son wronskien est non nul en un point quelconque* t.

COROLLAIRE 6. *Si le wronskien d'un système de solutions de l'équation* (1) *s'annule en un point, il est identiquement nul en tous les points* t.

EXERCICE 1. On demande d'établir si le wronskien d'un système de fonctions vectorielles φ_k, linéairement indépendantes, est identiquement nul.

EXERCICE 2. Montrer que le wronskien d'un système fondamental de solutions est proportionnel au déterminant d'une transformation pendant l'intervalle de temps (t_0, t) :

$$W(t) = (\det g_{t_0}^t)\, W(t_0).$$

Nota. Voir solution au point 6.

5. Cas d'une seule équation. Soit l'équation d'ordre n

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = 0 \tag{3}$$

à coefficients généralement variables $a_k = a_k(t)$, $t \in I$.

Certaines équations du second ordre à coefficients variables sont d'un usage si fréquent dans les applications qu'elles possèdent leurs propres noms ; leurs solutions sont étudiées et leurs tables établies avec le même détail que pour les fonctions sinus et cosinus (voir par exemple E. Yanke et F. Emde, *Table des fonctions*, M., éd. Naouka, 1977).

EXEMPLE 1. L'équation de Bessel :

$$\ddot{x} + \frac{1}{t}\dot{x} + \left(1 - \frac{\nu^2}{t^2}\right)x = 0.$$

EXEMPLE 2. L'équation hypergéométrique de Gauss :

$$\ddot{x} + \frac{(\alpha + \beta + 1)t - \gamma}{t(t-1)}\dot{x} + \frac{\alpha\beta}{t(t-1)}x = 0.$$

EXEMPLE 3. L'équation de Mathieu

$$\ddot{x} + (a + b\cos t)x = 0.$$

Nous aurions, certes, pu écrire l'équation (3) sous forme d'un système de n équations du premier ordre et appliquer les raisonnements précédents.

Néanmoins, on peut considérer directement l'espace X des solutions de l'équation (3). Cet espace est un espace vectoriel de fonctions $\varphi : I \to \mathbf{R}$. Il est évidemment isomorphe à l'espace des solutions d'un système équivalent de n équations. L'isomorphisme est défini par la relation

$$\boldsymbol{\varphi} = (\varphi, \dot{\varphi}, \dots, \varphi^{(n-1)}).$$

D'où le

COROLLAIRE 7. *L'espace X des solutions de l'équation* (3) *est isomorphe à l'espace des phases $\mathbf{R}^n$ de l'équation* (3), *cet isomorphisme pouvant être défini en associant à chaque solution $\varphi \in X$ l'ensemble des valeurs prises par les dérivées de φ en un point quelconque t_0* :

$$\varphi \mapsto (\varphi(t_0), \dot{\varphi}(t_0), \dots, \varphi^{(n-1)}(t_0)).$$

DÉFINITION. On appelle *système fondamental de solutions* de l'équation (3) une base de l'espace vectoriel X.

EXERCICE 1. Trouver un système fondamental de solutions de l'équation (3) avec des coefficients a_k constants. Par exemple, $\ddot{x} + ax = 0$.

Réponse. $\{t^r e^{\lambda t}\}$, où $0 \leqslant r < \nu$, si la racine λ de l'équation caractéristique est de multiplicité ν. Lorsque les racines sont complexes ($\lambda = \alpha \pm i\omega$), on peut remplacer $e^{\lambda t}$ par $e^{\alpha t} \cos \omega t$ et $e^{\alpha t} \sin \omega t$. En particulier, pour $\ddot{x} + ax = 0$, on a

$\cos \omega t$	et	$\sin \omega t$		si $a = \omega^2 > 0$;
$\operatorname{ch} \alpha t$	et	$\operatorname{sh} \alpha t$	ou $e^{\alpha t}$ et $e^{-\alpha t}$	si $a = -\alpha^2 < 0$;
1	et	t		si $a = 0$.

DÉFINITION. On appelle *wronskien d'un système de fonctions* $\varphi_k : I \to \mathbf{R}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, la fonction numérique $W : I \to \mathbf{R}$ qui au point t prend la valeur

$$W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \dots & \varphi_n(t) \\ \dot{\varphi}_1(t) & \dots & \dot{\varphi}_n(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}.$$

En d'autres termes, c'est le wronskien du système de fonctions vectorielles $\boldsymbol{\varphi}_k : I \to \mathbf{R}^n$ obtenues à partir de φ_k par la procédure habituelle :

$$\boldsymbol{\varphi}_k(t) = (\varphi_k(t),\ \dot{\varphi}_k(t), \dots, \varphi_k^{(n-1)}(t)), \quad k = 1, \dots, n.$$

Tout ce qui vient d'être dit sur le wronskien d'un système de solutions vectorielles de l'équation (1) se transpose intégralement au wronskien d'un système de solutions de l'équation (3). En particulier :

COROLLAIRE 8. *Si le wronskien d'un système de solutions de l'équation* (3) *s'annule en un point, il est identiquement nul en tous les points t.*

EXERCICE 2. Si le wronskien de deux fonctions est nul au point t_0, peut-on déduire qu'il est identiquement nul ?

COROLLAIRE 9. *Si le wronskien d'un système de solutions de l'équation* (3) *s'annule en un point, ces solutions sont linéairement dépendantes.*

EXERCICE 3. Si le wronskien de deux fonctions est identiquement nul, en résulte-t-il que ces fonctions sont linéairement dépendantes ?

COROLLAIRE 10. *Un système de n solutions de l'équation* (3) *est fondamental si, et seulement si, son wronskien est non nul en un point.*

EXEMPLE 4. Soit le système de fonctions $e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$. Ces fonctions forment un système fondamental de solutions d'une équation linéaire de la forme (3) (dire laquelle ?). Aussi sont-elles linéairement indépendantes.

Donc le wronskien est différent de 0. Or il est égal à

$$W = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & e^{\lambda_n t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n t} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 t} & \dots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n t} \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)t} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} .$$

COROLLAIRE 11. *Le déterminant de Vandermonde*

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

est différent de 0 *si les* λ_k *sont deux à deux distincts.*

EXEMPLE 5. Considérons l'équation du pendule $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$. Elle admet pour système fondamental ($\cos \omega t$, $\sin \omega t$). Le wronskien

$$W = \begin{vmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\omega \sin \omega t & \omega \cos \omega t \end{vmatrix} = \omega$$

est constant. Il n'y a pas lieu de s'étonner, car le flot de l'équation du pendule conserve les aires (voir § 16, pt. 4).

Voyons maintenant comment dans le cas général varie le volume des figures de l'espace des phases par des transformations $g_{t_0}^t$ dans l'intervalle de temps (t_0, t).

6. Théorème de Liouville. *Le wronskien d'un système de solutions de l'équation* (1) *est solution de l'équation différentielle*

$$W = aW, \quad ou \quad a(t) = \operatorname{tr} A(t). \tag{4}$$

COROLLAIRE.

$$W(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau} W(t_0), \quad \det g_{t_0}^t = e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau} . \tag{5}$$

En effet, l'équation (4) se résout facilement :

$$\frac{\mathrm{d}W}{W} = a\,\mathrm{d}t, \quad \ln W - \ln W_0 = \int_{t_0}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Du reste, une inspection de la formule (5) nous montre que le wronskien de tout système de solutions soit est identiquement nul, soit ne s'annule en aucun point.

EXERCICE 1. Trouver le volume de l'image du cube unité $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ par la transformation dans le temps 1 du flot du système

$$\dot{x}_1 = 2x_1 - x_2 - x_3, \quad \dot{x}_2 = x_1 + x_2 + x_3, \quad \dot{x}_3 = x_1 - x_2 - x_3.$$

Solution. $\operatorname{tr} A = 2$, donc $W(t) = e^{2t} W(0) = e^{2t}$.

Idée de la démonstration du théorème de Liouville. Si les coefficients sont constants, l'équation (4) n'est autre que la formule de Liouville du § 16. Si l'on fige les coefficients $A(t)$ (i.e. si on les pose égaux à leurs valeurs à un instant τ quelconque), on s'assure que la relation (4) est vraie quel que soit τ.

Démonstration. Soit la transformation linéaire $g_\tau^{\tau+\Delta} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ (fig. 197) dans le petit intervalle de temps $(\tau, \tau + \Delta)$. Cette transformation associe à la valeur $\varphi(\tau)$ d'une solution quelconque φ de l'équation (1) à l'instant τ la valeur $\varphi(\tau + \Delta)$. D'après l'équation (1) on a

$$\varphi(\tau + \Delta) = \varphi(\tau) + A(\tau)\varphi(\tau)\Delta + o(\Delta),$$

i.e.

$$g_\tau^{\tau+\Delta} = E + \Delta A(\tau) + o(\Delta).$$

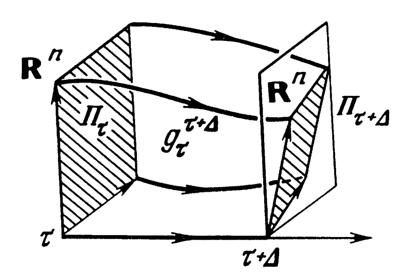


Fig. 197. Action du flot sur le parallélépipède engendré par un système fondamental de solutions

Par conséquent, d'après le § 16, le coefficient de dilatation des volumes par la transformation $g_\tau^{\tau+\Delta}$ est égal à $\det g_\tau^{\tau+\Delta} = 1 + \Delta a + o(\Delta)$, où $a = \operatorname{tr} A$.

Or $W(\tau)$ est le volume du parallélépipède Π_τ engendré par les valeurs de notre système de solutions à l'instant τ. La transformation $g_\tau^{\tau+\Delta}$ associe à ces valeurs les valeurs du même système à l'instant $\tau + \Delta$. Le parallélépipède $\Pi_{\tau+\Delta}$ engendré par ces nouvelles valeurs a pour volume $W(\tau + \Delta)$. Par conséquent

$$W(\tau + \Delta) = \det g_\tau^{\tau+\Delta} W(\tau) = [1 + a(\tau)\Delta + o(\Delta)] W(\tau),$$

d'où il vient $\dot{W} = aW$. C.Q.F.D.

COROLLAIRE. *Le wronskien d'un système de solutions de l'équation* (3) *est égal à*

$$W(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a_1(\tau)d\tau} W(t_0).$$

Lorsqu'on écrit l'équation (3) sous forme du système (1), on fait passer le terme $a_1 x^{(n-1)}$ au second membre, d'où le signe moins apparu dans la formule. La matrice du système obtenu est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ -a_n & \dots & & -a_1 \end{pmatrix}$$

Tous les éléments de la diagonale principale sont des zéros à l'exception d'un seul qui est égal à $-a_1$.

Exemple. Soit l'équation de la balançoire $\ddot{x} + f(t)x = 0$.

Théorème. *La position d'équilibre $x = \dot{x} = 0$ n'est asymptotiquement stable pour aucune valeur de f.*

Démonstration. Prenons une base quelconque ξ, η dans le plan $\mathbf{R}^2$ engendré par les conditions initiales (fig. 198). La stabilité signifierait que $g_{t_0}^t \xi \to 0$ et $g_{t_0}^t \eta \to 0$, et le wronskien du système fondamental correspondant tendrait vers 0 : $W(t) \to 0$.

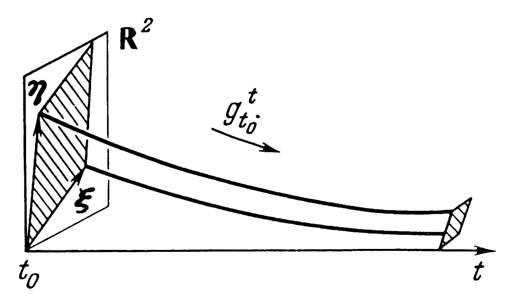


Fig. 198. Flot d'un système linéaire asymptotiquement stable

Notre équation est équivalente au système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -f(t)x_1 \end{cases}$$

dont la matrice est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -f & 0 \end{pmatrix}.$$

Or $\operatorname{tr} A = 0$, donc $W(t) = \text{const}$, ce qui contredit $W(t) \to 0$.

Exercice 2. Etudier l'équation de la balançoire en présence de frottement

$$\ddot{x} + \alpha(t)\dot{x} + \omega^2(t)x = 0.$$

Montrer que la stabilité asymptotique est impossible si le coefficient de frottement $\alpha(t) < 0$, $\forall t$.

Est-il vrai que, lorsque le coefficient de frottement est >0, la position d'équilibre $(0, 0)$ est toujours stable ?

REMARQUE. On appelle *divergence* d'un champ de vecteurs v sur l'espace euclidient $\mathbf{R}^n$, rapporté à des coordonnées cartésiennes x_i, la fonction

$$\operatorname{div} v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}.$$

En particulier, *la divergence d'un champ de vecteurs linéaire $v(x) = Ax$ est égale à la trace de l'opérateur A* :

$$\operatorname{div} Ax = \operatorname{tr} A.$$

La divergence d'un champ de vecteurs définit la vitesse de dilatation des volumes par le flot correspondant.

Soit un domaine D dans l'espace des phases euclidien de l'équation $\dot{x} = v(x)$ (cette équation n'est pas forcément linéaire). Désignons par $D(t)$ l'image du domaine D par le flot et par $V(t)$ le volume du domaine $D(t)$.

Exercice * 3. Démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME DE LIOUVILLE. $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \displaystyle\int_{D(t)} \operatorname{div} v \, \mathrm{d}x$ (fig. 199).

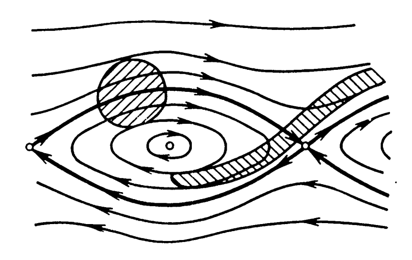


Fig. 199. Le flot d'un champ de vecteurs de divergence nulle conserve les aires

COROLLAIRE 1. Si $\operatorname{div} v = 0$, *le flot conserve le volume de tout domaine.*

On peut se représenter ce flot comme le courant d'un « fluide » incompressible dans l'espace des phases.

COROLLAIRE 2. *Le flot des équations de Hamilton*

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad k = 1, \dots, n$$

conserve les volumes.

D é m o n s t r a t i o n.

$$\operatorname{div} v = \sum \frac{\partial^2 H}{\partial q_k \partial p_k} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial q_k} \equiv 0.$$

Cette relation est fondamentale en physique statistique.

7. Théorèmes de Sturm sur les zéros des solutions des équations du second ordre. Les solutions des équations linéaires du second ordre possèdent d'originales propriétés oscillatoires. Sturm a parlé des « théorèmes dont j'ai l'honneur de porter le nom ».

Considérons les équations à coefficients constants (fig. 200) :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \ddot{x} - k^2 x = 0.$$

Les solutions de la première équation possèdent une infinité de zéros. L'intervalle de deux zéros consécutifs de toute solution non triviale est égal à π/ω. Chaque solution non identiquement nulle de la deuxième équation admet un zéro au plus. Dans les deux cas, l'intervalle de deux zéros consécutifs de toute solution non identiquement nulle contient un zéro de toute autre solution.

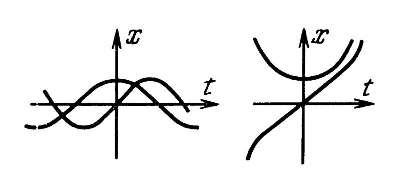


Fig. 200. Solutions des équations $\delta x \pm \ddot{x} = 0$

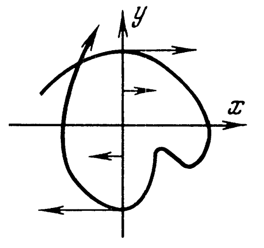


Fig. 201. Plan de phase de l'équation $\ddot{x} + q(t)x = 0$

Les théorèmes de Sturm montrent que ces phénomènes se produisent également pour les équations à coefficients variables :

$$\ddot{x} + q(t)x = 0 \tag{6}$$

(l'équation de forme plus générale $\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0$ se ramène sans peine à la forme (6)).

Etudions l'équation (6) dans le plan de phase $(x, y = \dot{x})$. Les orbites de l'équation non autonome peuvent se couper. On peut cependant recueillir une certaine information sur ces orbites pour l'équation du second ordre, une information sur laquelle est basé le théorème de Sturm.

Proposition 1. *Les orbites de l'équation* (6) *coupent la demi-droite* $x = 0, y > 0$ *dans le sens des* x *croissants, et la demi-droite* $x = 0, y < 0$ *dans le sens des* x *décroissants.*

Démonstration. Ecrivons l'équation (6) sous forme du système

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -q(t)x.$$

Sur la droite $x = 0$, le vecteur vitesse de phase admet pour tout y les composantes $(y, 0)$ (fig. 201). Ce qui prouve la proposition 1.

Signalons que pour $y \neq 0$ le vecteur vitesse de phase est non nul sur l'axe $x = 0$. Donc, les zéros de toute solution (non identiquement nulle) de l'équation (1) sont isolés et en nombre fini sur tout intervalle de l'axe t.

La proposition 1 entraîne immédiatement la

PROPOSITION 2. *Toute orbite coupe l'axe $x = 0$ alternativement pour $y > 0$ et $y < 0$.*

Désignons par φ l'angle polaire mesuré à partir de la direction positive de l'axe y vers la direction positive de l'axe x. La proposition 2 entraîne la

PROPOSITION 3. *L'angle φ croît de π le long de l'orbite lorsqu'on passe d'un point d'intersection d'une orbite et l'axe $x = 0$ au point d'intersection suivant.*

Cette proposition entraîne de toute évidence le

THÉORÈME 1. *L'intervalle de deux zéros consécutifs de toute solution de l'équation* (1) *contient un zéro de toute autre solution.*

En effet, le rayon qui balaie le demi-plan dépasse tout rayon restant dans ce demi-plan.

Démonstration. Considérons l'angle polaire φ le long de la première et de la deuxième solution (fig. 202) : $\varphi = \alpha(t)$, $\varphi = \beta(t)$. Supposons que les zéros de la première solution correspondent à $t = t_1$ et t_2 et que $y > 0$ pour $t = t_1$ (sinon il faut changer le signe de α). On peut alors considérer que $\alpha(t_1) = 0$. D'après la proposition 3 on a $\alpha(t_2) = \pi$. On peut considérer que $0 \leqslant \beta(t_1) \leqslant \pi$ (sinon on change le signe de β).

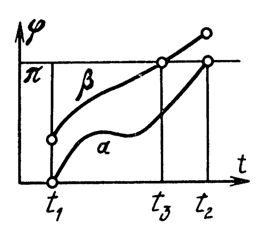


Fig. 202. Démonstration du théorème des zéros

Si les solutions sont linéairement dépendantes, leurs zéros sont confondus et le théorème est prouvé. Si les solutions sont linéairement indépendantes, les vecteurs qui leur correspondent dans le plan de phase sont à tout instant aussi linéairement indépendants. Donc, dans ce cas $\beta(t) \neq \alpha(t)$ quel que soit t.

Ainsi, $\beta(t_1) < \pi = \alpha(t_2) < \beta(t_2)$. Par suite, il existe dans l'intervalle $[t_1, t_2]$ un t_3 tel que $\beta(t_3) = \pi$. Ce t_3 est un zéro de la deuxième solution.

La deuxième considération sur laquelle sont fondés les théorèmes de Sturm est que la vitesse angulaire du mouvement du point représentatif de l'équation (6) autour de l'origine des coordonnées peut être calculée de façon explicite.

PROPOSITION 4. *Désignons par $\dot\varphi$ la vitesse de variation de l'angle polaire φ lorsque le point représentatif $(x(t), y(t))$ de l'équation* (1) *est en mouvement. Alors $\dot\varphi$ prend la même valeur pour tous les vecteurs (x, y) colinéaires à une même date t et cette valeur est égale à*

$$\dot\varphi = \frac{q(t)x^2 + y^2}{x^2 + y^2}.$$

Démonstration. Si r est le rayon vecteur du point représentatif, le double de la vitesse aréolaire est égal à $[r, \dot r]$ et en même temps à $-r^2\dot\varphi$ (le plan est rapporté aux coordonnées (x, y), et φ est l'angle orienté $(\vec{Oy}, \vec{Ox})$). Donc,

$$\dot\varphi = -\frac{[r, \dot r]}{r^2} = -\frac{\begin{vmatrix} x & y \\ y & -qx \end{vmatrix}}{x^2 + y^2}.$$

C.Q.F.D.

De la proposition 4 il s'ensuit qu'*à valeurs égales de l'angle polaire $\varphi \neq$ $\neq k\pi$, le rayon vecteur du point représentatif de l'équation de forme* (6) *dont le coefficient q est plus élevé, tourne plus vite.*

On en déduit le

THÉORÈME DE COMPARAISON. *Considérons deux équations de la forme* (6)

$$\ddot x + q(t)x = 0, \quad \ddot x + Q(t)x = 0$$

et supposons que $Q \geqslant q$. L'intervalle fermé de deux zéros consécutifs quelconques de toute solution de la première équation contient un zéro de toute solution de la seconde.

Démonstration. Supposons tout d'abord que Q est strictement supérieur à q pour tous les t. Désignons par $\varphi = \alpha(t)$ l'angle polaire le long de la première solution et par $\varphi = A(t)$, le long de la deuxième. On peut admettre comme plus haut que $\alpha(t_1) = 0$, $\alpha(t_2) = \pi$, $0 < A(t_1) < \pi$. A l'instant initial t_1 on a $A(t_1) > \alpha(t_1)$. Dans la suite, $A(t)$ restera strictement supérieur à $\alpha(t)$ pour $t_1 < t < t_2$. En effet, si la fonction α doublait A pour la première fois à un instant τ, elle prendrait la même valeur $(\neq k\pi)$ que A à cet instant. Mais alors au moment du dépassement, le rayon vecteur du point poursuivant tournerait moins vite $((\dot A(\tau) > \dot\alpha(\tau)$ en vertu de la proposition 4, puisque $Q > q)$ et le dépassement n'aurait pas lieu. Ainsi, $A(t_2) > \alpha(t_2) = \pi$. Or $A(t_1) < \pi$. Donc, il existe un instant $t_3 \in [t_1, t_2]$ tel que $A(t_3) = \pi$. Ceci est un zéro de la deuxième équation.

Si $Q \geqslant q$, la démonstration se fait par un passage à la limite à partir du cas $Q > q$.

COROLLAIRE. *L'intervalle de deux zéros consécutifs quelconques de l'équation* (6) *est*

a) $\leqslant \pi/\omega$ *si* $q(t) \geqslant \omega^2$, $\forall t$;

b) $\geqslant \pi/\Omega$ *si* $q(t) \leqslant \Omega^2$, $\forall t$. *En particulier, si* $q(t) \leqslant 0$, $\forall t$, *aucune solution de l'équation* (6), *exceptée la solution identiquement nulle, ne s'annule deux fois.*

Démonstration. a) Supposons que l'intervalle de deux zéros consécutifs puisse contenir strictement un intervalle de longueur π/ω. Pour tout intervalle de longueur π/ω, on peut choisir une solution de l'équation $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ de telle sorte que cet intervalle ait pour extrémités deux zéros consécutifs d'une solution. L'équation (6) avec un coefficient q supérieur à ω^2 n'admet pas de zéros sur cet intervalle.

Ceci contredit le théorème de comparaison. Donc, il est impossible de comprendre un intervalle de longueur π/ω entre deux zéros consécutifs d'une solution de l'équation (6).

b) Se prouve par comparaison avec l'équation $\ddot{x} + \Omega^2 x = 0$.

L'étude des vibrations propres des milieux continus (corde fixée) conduit au *problème de Sturm-Liouville* suivant.

Trouver les solutions de l'équation

$$\ddot{x} + (q(t) + \lambda)x = 0, \tag{7}$$

qui s'annulent aux extémités d'un intervalle $[0, l]$ *donné.*

Les valeurs du *paramètre spectral* λ pour lesquelles ces solutions (non identiquement nulles) existent s'appellent *valeurs propres* et ces solutions, *fonctions propres*.

EXERCICE 1. Trouver les valeurs et les fonctions propres pour $q \equiv 0$.

Réponse. Les fonctions propres sont $\sin \sqrt{\lambda_k}\, t$ (fig. 203) et les valeurs propres $\lambda_k = k^2\lambda_1$, où $\lambda_1 = (\pi/l)^2$.

Solution. $\ddot{x} + \lambda x = 0$, $x(0) = x(l) = 0 \Rightarrow \lambda > 0 \Rightarrow x = a \cos\sqrt{\lambda}t + b \sin\sqrt{\lambda}t$; $x(0) = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}l = k\pi \Rightarrow \lambda_k = k^2(\pi/l)^2$.

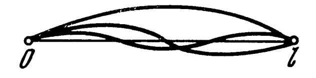


Fig. 203. Vibrations propres d'une corde

THÉORÈME 2. *Pour toute fonction q différentiable sur l'intervalle* $[0, l]$ *le problème de Sturm-Liouville admet une infinité de valeurs propres : les fonctions propres correspondantes possèdent une infinité de zéros sur cet intervalle.*

Démonstration. Considérons la solution de l'équation (7), qui vérifie la condition initiale $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 1$. Désignons par $\varphi = \alpha(t, \lambda)$ la valeur de l'angle polaire le long de l'orbite correspondant à cette solution ;

supposons que $\alpha(0, \lambda) \equiv 0$. La fonction α est continue. Traitons la valeur $\alpha(l, \lambda)$ comme une fonction de λ. La quantité $\alpha(l, \lambda)$ tend vers l'infini lorsque $\lambda \to +\infty$. En effet, supposons que $q + \lambda > \omega^2$. Si ω est assez grand, le segment π/ω sera contenu dans $[0, l]$ un nombre de fois k aussi grand que l'on veut. Donc, le nombre de zéros d'une équation ayant un λ aussi grand sera $\geqslant k$ dans cet intervalle (théorème de comparaison). Par suite, $\alpha(l, \lambda) \geqslant \pi k$ (proposition 3). Ainsi, $\alpha(l, \lambda) \to \infty$ lorsque $\lambda \to +\infty$. Par conséquent, il existe une infinité de valeurs propres λ_k telles que $\alpha(l, \lambda_k) = \pi k$. C.Q.F.D.

EXERCICE 2. Montrer que $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k/k^2 = (\pi/l)^2$.

EXERCICE 3. Transposer les résultats aux équations de la forme

$$(p\dot{x})' + qx = 0, \quad p(t) > 0, \forall t.$$

Nota. Envisager le plan de phase (x, y), où $y = p\dot{x}$.

§ 28. Equations linéaires à coefficients périodiques

La théorie des équations linéaires à coefficients périodiques montre comment il faut se balancer sur une balançoire, et pourquoi la position supérieure d'équilibre du pendule qui, d'ordinaire, est instable devient stable si le point de suspension accomplit des oscillations assez rapides le long de la verticale.

1. Application en une période. Soit l'équation différentielle

$$\dot{x} = v(x, t), \quad v(x, t + T) = v(x, t), \quad x \in \mathbf{R}^n, \tag{1}$$

dont le second membre est une fonction périodique du temps (fig. 204).

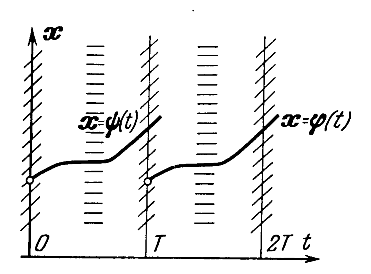


Fig. 204. Espace des phases élargi de l'équation différentielle à coefficients périodiques

EXEMPLE 1. Le mouvement d'un pendule dont les paramètres varient périodiquement (exemple : le mouvement d'une balançoire) est décrit par un système d'équations de la forme (1) :

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\omega^2(t)x_1 ; \quad \omega(t + T) = \omega(t). \tag{2}$$

Nous supposerons que toutes les solutions de l'équation (1) sont indéfi-

niment prolongeables : *a priori* c'est vrai dans le cas des équations linéaires qui nous intéressent particulièrement.

La périodicité du second membre de l'équation se traduit dans des propriétés spéciales du flot de l'équation (1).

LEMME 1. *La transformation* $g_{t_1}^{t_2} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ *de l'espace des phases* $\mathbf{R}^n$ *dans* $\mathbf{R}^n$, *pendant l'intervalle de temps* (t_1, t_2), *ne varie pas si l'on augmente à la fois* t_1 *et* t_2 *d'une valeur égale à la période* T *du second membre de l'équation* (1).

Démonstration. Il nous faut démontrer que la translatée $\psi(t) = \varphi(t + T)$ de la solution $\varphi(t)$ est également solution. Or une T-translation de l'espace des phases élargi, le long de l'axe du temps, transforme en lui-même le champ de directions de l'équation (1) (fig. 204). Donc la courbe intégrale translatée de l'équation (1) est partout tangente au champ de directions et par conséquent conserve sa propriété de courbe intégrale.

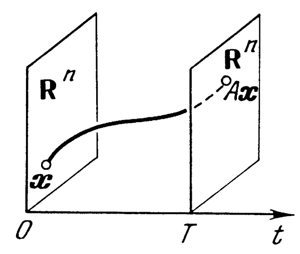


Fig. 205. Application en une période T

En définitive $g_{t_1+T}^{t_2+T} = g_{t_1}^{t_2}$, ce qu'il fallait démontrer.

Considérons en particulier la transformation g_0^T opérée par le flot pendant une période T. Cette transformation jouera un rôle important dans la suite ; nous l'appellerons *application pendant le temps* T et la noterons (fig. 205)

$$A = g_0^T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n.$$

. EXEMPLE 2. Pour les systèmes

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1, \\ \dot{x}_2 = -x_2, \end{cases}$$

que l'on peut considérer comme périodiques, et de période quelconque T, l'application A est respectivement une rotation et une rotation hyperbolique.

LEMME 2. *Les transformations* g_0^{nT} *forment un groupe*

$$g_0^{nT} = A^n.$$

De plus $g_0^{nT+s} = g_0^s g_0^{nT}$.

D é m o n s t r a t i o n. D'après le lemme 1 on a $g_{nT}^{nT+s} = g_0^s$. Donc $g_0^{nT+s} = g_{nT}^{nT+s} g_0^{nT} = g_0^s g_0^{nT}$. Si l'on pose $s = T$, on a $g_0^{(n+1)T} = A g_0^{nT}$, d'où il vient par récurrence $g_0^{nT} = A^n$.

Le lemme est démontré.

A toutes les propriétés des solutions de l'équation (1) correspondent des propriétés analogues de l'application A en une période.

THÉORÈME. 1) *Un point* $\boldsymbol{x}_0$ *est le point fixe de l'application* A ($A\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}_0$), *si, et seulement si, la solution vérifiant la condition initiale* $x(0) = \boldsymbol{x}_0$ *est une solution périodique de période* T.

2) *Une solution périodique* $\boldsymbol{x}(t)$ *est stable au sens de Liapounov* (resp. *asymptotiquement stable*) *si, et seulement si, le point fixe* $\boldsymbol{x}_0$ *de l'application A est stable au sens de Liapounov* (resp. *asymptotiquement stable*) *).

3) *Si le système* (1) *est linéaire, i.e. si* $v(\boldsymbol{x}, t) = V(t)\boldsymbol{x}$ *est une fonction linéaire en* $\boldsymbol{x}$, *l'application A est linéaire.*

4) *Si, par ailleurs, la trace de l'opérateur linéaire* $V(t)$ *est nulle, l'application A conserve les volumes* : $\det A = 1$.

D é m o n s t r a t i o n. Les assertions 1) et 2) découlent de la relation $g_0^{T+s} = g_0^s A$ et du fait que sur l'intervalle $[0, T]$ la solution est une fonction continue par rapport aux conditions initiales.

L'assertion 3) résulte de ce qu'un système linéaire admet pour solution une somme de solutions.

L'assertion 4) dérive du théorème de Liouville.

2. Conditions de stabilité. Appliquons le théorème démontré à l'application A du plan de phase x_1, x_2 sur lui-même, associée au système (2). Le système (2) étant linéaire et la trace de la matrice du second membre nulle, il vient le

COROLLAIRE. *L'application A est linéaire et conserve les aires* ($\det A = 1$). *Pour que la solution nulle du système d'équations* (2) *soit stable, il faut et il suffit que l'application A soit stable.*

EXERCICE. Montrer qu'une rotation du plan est une application stable, tandis qu'une rotation hyperbolique est une application instable.

Edutions maintenant plus en détail les applications linéaires d'un plan sur lui-même, laissant invariantes les aires.

---

*) Un point fixe x_0 de l'application A est *stable au sens de Liapounov* (resp. *asymptotiquement stable*) si $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tel que la relation $|x - x_0| < \delta$ entraîne $|A^n x - A^n x_0| < \varepsilon$ pour tous les n à la fois : $0 < n < \infty$ (resp. $A^n x - A^n x_0 \to 0$ lorsque $n \to \infty$).

THÉORÈME. *Supposons que A soit une matrice associée à une application linéaire, laissant invariante les aires, d'un plan sur lui-même* ($\det A = 1$). *Alors l'application A est stable si* $|\operatorname{tr} A| < 2$ *et instable si* $|\operatorname{tr} A| > 2$.

Démonstration. Soient λ_1 et λ_2 les valeurs propres de A. Elles vérifient l'équation caractéristique $\lambda^2 - \operatorname{tr} A\lambda + 1 = 0$ à coefficients réels

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr} A, \quad \lambda_1\lambda_2 = \det A = 1.$$

Les racines λ_1 et λ_2 de cette équation réelle du second degré sont réelles pour $|\operatorname{tr} A| > 2$, et conjuguées complexes pour $|\operatorname{tr} A| < 2$ (fig. 206).

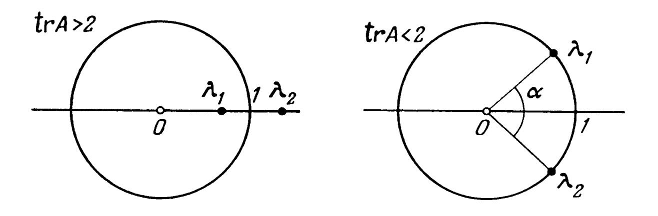


Fig. 206. Valeurs propres de l'opérateur de monodromie

Dans le premier cas, l'une des deux valeurs propres est strictement inférieure, et l'autre strictement supérieure, à 1 en module ; l'application A est une rotation hyperbolique, donc elle est instable. Dans le second cas, les valeurs propres sont situées sur le cercle unité :

$$1 = \lambda_1\lambda_2 = \lambda_1\bar{\lambda}_1 = |\lambda_1|^2.$$

L'application A est équivalente à une rotation d'angle α (où $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\alpha}$) i.e. elle devient rotation par un choix convenable de la structure euclidienne sur le plan (dire pourquoi ?). Elle est donc stable.

Le théorème est démontré.

Ainsi donc, le problème de la stabilité de la solution triviale du système (2) s'est ramené à un calcul de la trace de la matrice A. Malheureusement il n'est possible de calculer explicitement cette trace que dans des cas très spéciaux. On peut néanmoins la trouver approximativement en intégrant numériquement l'équation sur l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant T$. Dans le cas important où $\omega(t)$ est proche d'une constante, on recourt à des raisonnements généraux simples.

3. Systèmes fortement stables. Soit un système linéaire de la forme (1) dans un espace des phases à deux dimensions ($n = 2$). Ce système est appelé *hamiltonien* si la divergence de $\boldsymbol{v}$ est nulle. Comme nous l'avons souligné plus haut, si un système est hamiltonien, le flot laisse invariantes les aires, i.e. $\det A = 1$.

DÉFINITION. La solution triviale d'un système linéaire hamiltonien est *fortement stable* si elle est stable et si tout système linéaire hamiltonien proche possède une solution triviale également stable.

Des deux théorèmes précédents on déduit le

COROLLAIRE. *Si* $|\operatorname{tr} A| < 2$, *la solution nulle est alors fortement stable.*

En effet, si $|\operatorname{tr} A| < 2$, l'application A' associée à un système suffisamment proche satisfait également à la condition $|\operatorname{tr} A'| < 2$.

Appliquons cela à un système à coefficients presque constants. Soit par exemple l'équation

$$\ddot{x} = -\omega^2(1 + \varepsilon a(t))x, \qquad \varepsilon \ll 1, \tag{3}$$

où $a(t + 2\pi) = a(t)$, par exemple $a(t) = \cos t$ (i.e. un pendule de fréquence proche de ω, de faible amplitude et de période 2π) *).

Tout système de la forme (3) sera représenté par un point sur le plan engendré par les paramètres ε, ω (fig. 207). Il est évident que les systèmes stables ($|\operatorname{tr} A| < 2$) de même d'ailleurs que les systèmes instables ($|\operatorname{tr} A| > 2$) forment un ensemble ouvert dans le plan (ω, ε).

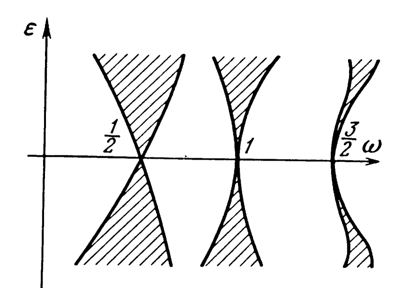


Fig. 207. Domaine d'instabilité en cas de résonance paramétrique

La frontière de stabilité est donnée par l'équation $|\operatorname{tr} A| = 2$.

THÉORÈME. *Tous les points situés sur l'axe* ω, *à l'exclusion des points* $\omega = k/2$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, *correspondent à des systèmes fortement stables de la forme* (3).

Par conséquent, l'ensemble des systèmes instables ne peut couper l'axe ω qu'aux points $\omega = k/2$. En d'autres termes, une balançoire dont on fait varier faiblement et périodiquement la longueur ne peut se balancer que si la période de ces variations est proche d'un nombre entier de demi-périodes des oscillations propres, un résultat connu d'ailleurs empiriquement.

La démonstration du théorème formulé se fonde sur le fait que pour $\varepsilon = 0$ l'équation (3) est à coefficients constants et s'intègre explicitement.

*) Lorsque $a(t) = \cos t$, l'équation (3) est appelée *équation de Mathieu.*

EXERCICE. Dans le système (3) poser $\varepsilon = 0$ et calculer la matrice représentant la transformation A au cours d'une période $T = 2\pi$ dans la base $x, \dot{x}$.

Solution.

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$$

est la solution générale ;

$$x = \cos \omega t, \quad \dot{x} = -\omega \sin \omega t$$

est une solution particulière vérifiant la condition initiale $x = 1, \dot{x} = 0$;

$$x = \frac{1}{\omega} \sin \omega t, \quad \dot{x} = \cos \omega t$$

une autre solution particulière vérifiant la condition initiale $x = 0, \dot{x} = 1$.

Réponse.

$$A = \begin{pmatrix} \cos 2\pi\omega & \frac{1}{\omega} \sin 2\pi\omega \\ -\omega \sin 2\pi\omega & \cos 2\pi\omega \end{pmatrix}.$$

Donc $|\operatorname{tr} A| = |2 \cos 2\omega\pi| < 2$ si $\omega \neq k/2, k = 0, 1, \ldots$, et le théorème découle du corollaire précédent.

Une plus soigneuse analyse *) montre que d'une façon générale (et en particulier pour $a(t) = \cos t$), au voisinage des points $\omega = k/2, k = 1, 2, \ldots$, le domaine d'instabilité (qui est hachuré sur la fig. 207) tend effectivement vers l'axe ω.

Par conséquent, sous certaines relations entre la fréquence de variation des paramètres et la fréquence propre de la balançoire ($\omega \approx k/2, k = 1, 2, \ldots$), la position inférieure d'équilibre de la balançoire parfaite (3) est instable. Une variation périodique aussi petite que l'on veut de la longueur fait balancer la balançoire.

Ce phénomène est appelé *résonance paramétrique*. Le trait caractéristique de la résonance paramétrique est qu'elle se manifeste le plus intensément dans le cas précisément où la fréquence de la variation des paramètres ν (dans l'équation (3) la fréquence ν est égale à 1) est deux fois plus grande que la fréquence propre ω.

REMARQUE. Théoriquement, le phénomène de la résonance paramétrique se manifeste quel que soit l'entier k définissant le rapport $\omega/\nu \approx k/2$, $k = 1, 2, \ldots$ Pratiquement, il n'apparaît que lorsque k n'est pas très grand ($k = 1, 2$, rarement 3). Et pour cause

a) pour k grand, le domaine d'instabilité tend vers l'axe ω en forme de langue pointue et l'intervalle des fréquences de résonance ω est rigoureusement limité ($\sim \varepsilon^k$ pour la fonction différentiable $a(t)$ dans l'équation (3)) ;

*) Voir, par exemple, l'exercice 1, pt. 4, résolu plus bas.

b) l'instabilité est faiblement prononcée pour k grand, car $|\operatorname{tr} A| - 2$ est petit et les valeurs propres sont alors proches de 1 ;

c) un frottement aussi petit que l'on veut fait en sorte que la résonance paramétrique d'ordre k n'apparaît que si l'amplitude est supérieure à une valeur minimale ε_k : pour $\varepsilon < \varepsilon_k$ les oscillations s'amortissent. Lorsque k croît, ε_k croît rapidement (fig. 208).

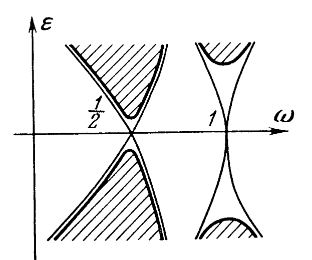


Fig. 208. Influence d'un faible frottement sur le domaine d'instabilité

Remarquons par ailleurs que x croît indéfiniment dans le cas instable de l'équation (3). Dans les systèmes réels, l'amplitude des oscillations est finie, car, lorsque x est grand, l'équation linéarisée (3) n'a plus d'effet et il faut alors tenir compte des facteurs non linéaires.

4. Calculs.

EXERCICE 1. Trouver la forme du domaine de stabilité sur le plan (ε, ω) du système décrit par l'équation

$$\ddot{x} = -f(t)x, \quad f(t + 2\pi) = f(t).$$
$$f(t) = \begin{cases} \omega + \varepsilon, & 0 \leqslant t < \pi ; \\ \omega - \varepsilon, & \pi \leqslant t < 2\pi ; \end{cases} \quad \varepsilon \ll 1 . \tag{4}$$

Solution. De la solution de l'exercice précédent (point 3) il s'ensuit que $A = A_2 A_1$, où

$$A_k = \begin{pmatrix} c_k & s_k/\omega_k \\ -\omega_k s_k & c_k \end{pmatrix}, \quad c_k = \cos \pi\omega_k, \quad s_k = \sin \pi\omega_k, \quad \omega_{1,2} = \omega \pm \varepsilon.$$

Donc la frontière de la zone de stabilité a pour équation

$$|\operatorname{tr} A| = \left| 2c_1 c_2 - \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1}\right) s_1 s_2 \right| = 2. \tag{5}$$

Vu que $\varepsilon \ll 1$ on a

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\omega + \varepsilon}{\omega - \varepsilon} \approx 1.$$

Posons $\frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} = 2(1 + \Delta)$. D'où il vient

$$\Delta = \frac{2\varepsilon^2}{\omega^2} + O(\varepsilon^4) \ll 1.$$

Compte tenu des relations $2c_1c_2 = \cos 2\pi\varepsilon + \cos 2\pi\omega$, $2s_1s_2 = \cos 2\pi\varepsilon - \cos 2\pi\omega$, l'équation (5) s'écrit sous la forme

$$-\Delta \cos 2\pi\varepsilon + (2 + \Delta) \cos 2\pi\omega = \pm 2$$

ou encore

$$\cos 2\pi\omega = \frac{2 + \Delta \cos 2\pi\varepsilon}{2 + \Delta}, \qquad (6_1)$$

$$\cos 2\pi\omega = \frac{-2 + \Delta \cos 2\pi\varepsilon}{2 + \Delta}. \qquad (6_2)$$

Dans le premier cas, $\cos 2\pi\omega \approx 1$. Posons donc $\omega = k + a$, $|a| \ll 1$; $\cos 2\pi\omega = \cos 2\pi a = 1 - 2\pi^2 a^2 + O(a^4)$.

Ecrivons l'équation (6_1) sous la forme

$$\cos 2\pi\omega = 1 - \frac{\Delta}{2 + \Delta}(1 - \cos 2\pi\varepsilon)$$

ou

$$2\pi^2 a^2 + O(a^4) = \Delta\pi^2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4).$$

En substituant $\Delta = \frac{2\varepsilon^2}{\omega^2} + O(\varepsilon^4)$ on a $a = \pm \frac{\varepsilon^2}{\omega^2} + o(\varepsilon^2)$, d'où $\omega = k \pm \frac{\varepsilon^2}{k^2} + o(\varepsilon^2)$ (fig. 209).

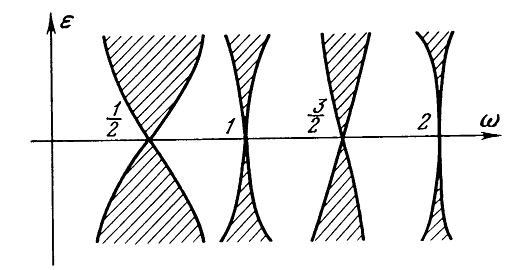


Fig. 209. Domaine d'instabilité pour l'équation (4)

L'équation (6_2) se résout d'une façon analogue ; on obtient finalement

$$\omega = \varkappa \pm \varepsilon/(\pi\varkappa) + o(\varepsilon), \quad \varkappa = k + 1/2.$$

EXERCICE 2. La position supérieure d'équilibre d'un pendule, d'ordinaire instable, peut-elle devenir stable si le point de suspension oscille verticalement ?

Solution. Soient l la longueur du pendule ; a ($a \ll l$) l'amplitude des oscillations du point de suspension ; 2τ la période des oscillations du point de suspension, l'accélération du point de suspension étant constante et égale à $\pm c$ ($c = 8a/\tau^2$) pendant chaque demi-période. Il s'avère que lorsque les oscillations du point de suspension sont suffisamment rapides ($\tau \ll 1$), la position supérieure d'équilibre devient stable. L'équation du mouvement peut s'écrire sous la forme $\ddot{x} = (\omega^2 \pm \alpha^2)x$ (le signe varie au bout d'un temps τ), où $\omega^2 = g/l$, $\alpha^2 = c/l$. Si les oscillations du point de suspension sont suffisamment rapides, alors $\alpha^2 > \omega^2$ ($\alpha^2 = 8a/(l\tau^2)$).

Comme dans l'exercice précédent on a $A = A_2 A_1$ où

$$A_1 = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} k\tau & k^{-1} \operatorname{sh} k\tau \\ k \operatorname{sh} k\tau & \operatorname{ch} k\tau \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} \cos \Omega\tau & \Omega^{-1} \sin \Omega\tau \\ -\Omega \sin \Omega\tau & \cos \Omega\tau \end{pmatrix},$$

$$k^2 = \alpha^2 + \omega^2, \quad \Omega^2 = \alpha^2 - \omega^2.$$

La condition de stabilité $|\operatorname{tr} A| < 2$ s'écrit alors sous la forme

$$\left| 2 \operatorname{ch} k\tau \cos \Omega\tau + \left(\frac{k}{\Omega} - \frac{\Omega}{k}\right) \operatorname{sh} k\tau \sin \Omega\tau \right| < 2. \tag{7}$$

Montrons que cette condition est remplie lorsque les oscillations du point de suspension sont suffisamment rapides, i.e. lorsque $c \gg g$. Introduisons les variables sans dimension ε et μ :

$$\frac{a}{l} = \varepsilon^2 \ll 1, \quad \frac{g}{c} = \mu^2 \ll 1.$$

Alors

$$k\tau = 2\sqrt{2}\varepsilon\sqrt{1 + \mu^2}, \quad \Omega\tau = 2\sqrt{2}\varepsilon\sqrt{1 - \mu^2},$$

$$\frac{k}{\Omega} - \frac{\Omega}{k} = 2\mu^2 + O(\mu^4).$$

Aussi pour ε et μ petits a-t-on avec une précision d'ordre $o(\varepsilon^4 + \mu^4)$:

$$\operatorname{ch} k\tau = 1 + 4\varepsilon^2(1 + \mu^2) + \frac{2}{3}\varepsilon^4 + \dots,$$

$$\cos \Omega\tau = 1 - 4\varepsilon^2(1 - \mu^2) + \frac{8}{3}\varepsilon^4 + \dots,$$

$$\left(\frac{k}{\Omega} - \frac{\Omega}{k}\right) \operatorname{sh} k\tau \sin \Omega\tau = 16\varepsilon^2\mu^2 + \dots$$

Ainsi, la condition de stabilité (7) prend la forme

$$2\left(1 - 16\varepsilon^4 + \frac{16}{3}\varepsilon^4 + 8\varepsilon^2\mu^2 + \dots\right) + 16\varepsilon^2\mu^2 < 2.$$

Si l'on néglige les petits termes d'ordre supérieur, on a $\frac{2}{3}\,16\varepsilon^4 \geqslant 32\mu^2\varepsilon^2$, ou $\mu < \varepsilon/\sqrt{3}$, ou

encore $g/c < a/(3l)$. Cette condition peut encore s'écrire

$$N > \sqrt{\frac{3}{32}}\,\omega\frac{l}{a} \approx 0{,}3\omega\frac{l}{a},$$

où $N = l/(2\tau)$ est le nombre d'oscillations effectuées par le point de suspension dans l'unité de temps. Si, par exemple, la longueur du pendule est l = 20 cm, l'amplitude des oscillations du point de suspension a = 1 cm, alors $N > 0{,}31\sqrt{980/20}\cdot 20 \approx 43$ (oscillations par seconde). En particulier, la position d'équilibre supérieure est stable si le point de suspension accomplit plus de 50 oscillations par seconde.

§ 29. Variation des constantes

Lorsqu'on étudie des équations proches des équations « non perturbées » que nous avons déjà abordées, il est souvent utile de recourir au procédé suivant. Soit c une intégrale première de l'équation « non perturbée ». La fonction c ne sera plus une intégrale première pour des équations « perturbées » proches. Néanmoins on réussit souvent à savoir (exactement ou approximativement) comment en fonction du temps varie $c(\varphi(t))$, où φ est solution de l'équation « perturbée ». Si, notamment, l'équation initiale est linéaire et homogène et l'équation perturbée non homogène, alors ce procédé nous donne la solution sous une forme explicite et, de plus, aucune « petitesse » des perturbations n'est requise en raison de la linéarité de l'équation.

1. Cas simple. Soit l'équation linéaire et non homogène simple

$$\dot{x} = f(t), \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad t \in I, \tag{1}$$

associée à l'équation homogène simple

$$\dot{x} = 0. \tag{2}$$

L'équation (1) se résout au moyen d'une quadrature

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{3}$$

2. Cas général. Soit l'équation linéaire et non homogène

$$\dot{x} = A(t)x + h(t), \quad x \in \mathbf{R}^n. \quad t \in I, \tag{4}$$

associée à l'équation homogène

$$\dot{x} = A(t)x. \tag{5}$$

Supposons que nous savons résoudre l'équation homogène (5) et soit $x = \varphi(t)$ sa solution. Dans l'espace des phases élargi (fig. 210), prenons les conditions initiales $c = \varphi(t_0)$ pour coordonnées (c, t) redressant les courbes intégrales de l'équation (5).

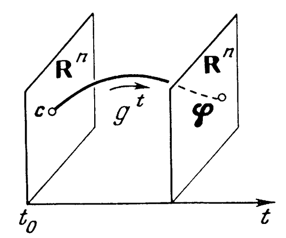


Fig. 210. Les coordonnées du point c sont des intégrales premières de l'équation homogène

Dans les nouvelles coordonnées, l'équation (5) s'écrit sous la forme simple (2). On passe aux nouvelles coordonnées par une transformation linéaire en x. Donc, dans les nouvelles coordonnées, l'équation non homogène (4) prend la forme simple (1) sous laquelle nous pouvons la résoudre.

3. Calculs. Cherchons la solution de l'équation non homogène (4) sous la forme

$$\varphi(t) = g^t c(t), \qquad c : I \to \mathbf{R}^n, \tag{6}$$

où $g^t : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ est un opérateur linéaire de transformation pendant l'intervalle de temps (t_0, t) associé à l'équation homogène (5).

En dérivant par rapport à t on obtient

$$\dot{\varphi} = \dot{g}^t c + g^t \dot{c} = A g^t c + g^t \dot{c} = A\varphi + g^t \dot{c}.$$

En portant dans l'équation (4) on a $g^t \dot{c} = h(t)$. Donc on vient de démontrer le

THÉORÈME. *La formule* (6) *donne les solutions de l'équation* (4) *si, et seulement si, c est solution de l'équation $\dot{c} = f(t)$, où $f(t) = (g^t)^{-1} h(t)$.*

La dernière équation est de la forme simple (1). Si on lui applique la formule (3), on obtient le

COROLLAIRE. *La solution de l'équation non homogène* (4) *vérifiant la condition initiale $\varphi(t_0) = c$ est de la forme*

$$\varphi(t) = g^t \left(c + \int_{t_0}^{t} (g^\tau)^{-1} h(\tau)\, d\tau \right).$$

REMARQUE. Dans un système de coordonnées, le théorème démontré se formule ainsi :

Pour résoudre l'équation linéaire et non homogène (4) *lorsqu'on connaît un système fondamental de solutions de l'équation homogène* (5), *il suffit de substituer dans l'équation non homogène une combinaison linéaire des solutions de ce système fondamental en considérant les coefficients comme des fonctions inconnues du temps. On obtient alors pour ces coefficients une équation simple* (1) *d'où on les tire.*

EXERCICE. Résoudre l'équation $\ddot{x} + x = f(t)$.

Solution. Ecrivons le système homogène de deux équations :

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -x_1.$$

Son système fondamental de solutions est

$$(x_1 = \cos t, x_2 = -\sin t)\ ; \quad (x_1 = \sin t, x_2 = \cos t).$$

D'après la règle générale la solution est

$$x_1 = c_1(t) \cos t + c_2(t) \sin t, \quad x_2 = -c_1(t) \sin t + c_2(t) \cos t.$$

On tire c_1 et c_2 du système

$$\dot{c}_1 \cos t + \dot{c}_2 \sin t = 0, \quad -\dot{c}_1 \sin t + \dot{c}_2 \cos t = f(t).$$

Par conséquent,

$$\dot{c}_1 = -f(t) \sin t, \dot{c}_2 = f(t) \cos t.$$

Réponse. $x(t) = \left[x(0) - \int_0^t f(\tau) \sin \tau \mathrm{d}\tau\right] \cos t + \left[\dot{x}(0) + \int_0^t f(t) \cos \tau \,\mathrm{d}\tau\right] \sin t.$

CHAPITRE 4

DÉMONSTRATION DES THÉORÈMES FONDAMENTAUX

Dans ce chapitre nous allons démontrer les théorèmes d'existence, d'unicité, de continuité et de différentiabilité des solutions, ainsi que les théorèmes de redressement d'un champ de vecteurs et d'un champ de directions.

Les démonstrations offrent également un procédé de construction approchée des solutions.

§ 30. Applications contractantes

La méthode de recherche du point fixe d'une application d'un espace métrique sur lui-même, exposée plus bas, pourra être utilisée avec succès dans la suite pour la construction des solutions.

1. Définition. Soit $A : M \to M$ une application dans un espace métrique M (muni d'une métrique ρ). L'application A est par définition *contractante* s'il existe une constante λ, $0 < \lambda < 1$ telle que

$$\rho(Ax, Ay) \leqslant \lambda\rho(x, y) \quad \forall x, y \in M. \tag{1}$$

EXEMPLE 1. Soit $A : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction réelle d'une variable réelle (fig. 211). Si sa dérivée est partout < 1 en module, l'application A peut ne pas être contractante. Elle le sera par contre si

$$|A'| \leqslant \lambda < 1.$$

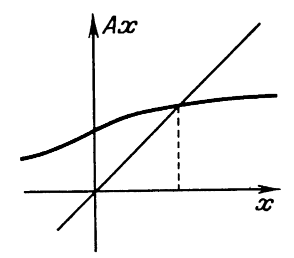


Fig. 211. Point fixe d'une application contractante

EXEMPLE 2. Soit $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ un opérateur linéaire. Si toutes les valeurs propres de A sont situées strictement à l'intérieur du cercle unité, il existe dans $\mathbf{R}^n$ une métrique euclidienne (fonction de Liapounov, voir § 22) telle que A est une application contractante.

EXERCICE 1. Parmi les applications suivantes d'une droite dans elle-même (munie de la metrique ordinaire) induquer celles qui sont contractantes.

1) $y = \sin x$; 2) $y = \sqrt{x^2 + 1}$; 3) $y = \operatorname{Arc\,tg} x$.

EXERCICE 2. Peut-on remplacer le signe $\leqslant$ par le signe $<$ dans l'inégalité (1) ?

2. Théorème des applications contractantes. Un point $x \in M$ est appelé *point fixe* d'une application $A : M \to M$ si $Ax = x$.

Soit $A : M \to M$ une application contractante d'un espace métrique complet M dans lui-même. Alors A possède un point fixe et un seul. Pour tout $x \in M$ la suite des images du point x par l'application A (fig. 212)

$$x, Ax, A^2x, A^3x, \ldots$$

converge vers le point fixe de A.

Démonstration. Supposons que $\rho(x, Ax) = d$. Alors

$$\rho(A^nx, A^{n+1}x) \leqslant \lambda^n d.$$

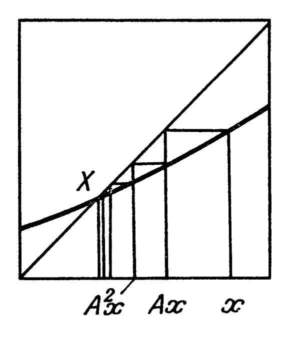


Fig. 212. Suite des images du point x par l'application A

La série $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n$ étant convergente, la suite A^nx, $n = 0, 1, 2, \ldots$, est une suite de Cauchy. Comme l'espace M est complet, il existe la limite

$$X = \lim_{n\to\infty} A^nx.$$

Montrons que X est le point fixe de A. Remarquons que toute application contractante est continue (on peut prendre $\delta = \varepsilon$). Donc

$$AX = A \lim_{n\to\infty} A^nx = \lim_{n\to\infty} A^{n+1}x = X.$$

Montrons que tout point fixe Y se confond avec X. En effet

$$\rho(X, Y) = \rho(AX, AY) \leqslant \lambda\rho(X, Y), \quad \lambda < 1 \Rightarrow \rho(X, Y) = 0.$$

3. Remarque. Les points x, Ax, A^2x, ... sont appelés *approximations successives* de X. Soit x une approximation du point fixe X de l'application contractante A. On évalue aisément la précision de cette approximation en

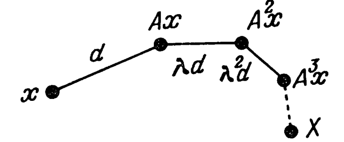


Fig. 213. Estimation de la précision des approximations successives du point fixe X

fonction de la distance d des points x et Ax :

$$\rho(x, X) \leqslant \frac{d}{1-\lambda},$$

vu que $d + \lambda d + \lambda^2 d + \ldots = \dfrac{d}{1-\lambda}$ (fig. 213).

§ 31. Démonstration des théorèmes d'existence et de dépendance continue par rapport aux conditions initiales

Nous allons construire ici une application contractante d'un espace métrique complet, telle que son point fixe définisse la solution de l'équation différentielle étudiée.

1. Approximations successives de Picard. Soit $\dot{x} = v(x, t)$ une équation différentielle définie par un champ de vecteurs v sur un domaine de l'espace des phases élargi $\mathbf{R}^{n+1}$ (fig. 214).

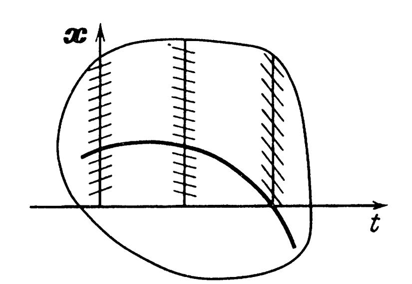


Fig. 214. Courbe integrale de l'équation $\dot{x} = v(x, t)$

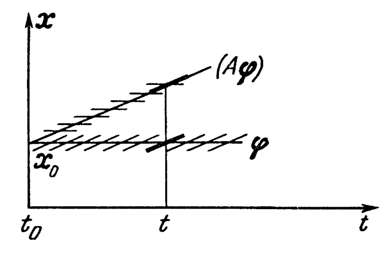


Fig. 215. Application A de Picard

Nous appellerons *application de Picard* une application A qui transforme la fonction $\varphi : t \mapsto x$ en la fonction $A\varphi : t \mapsto x$, où

$$(A\varphi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(\varphi(\tau), \tau)\mathrm{d}\tau.$$

Géométriquement, le passage de φ à $A\varphi$ (fig. 215) revient à construire d'après la courbe φ une nouvelle courbe $(A\varphi)$ dont la tangente en chaque point t est parallèle au champ de directions donné, cette tangente étant construite non pas sur la courbe $(A\varphi)$ elle-même (car alors $A\varphi$ serait solution) mais au point correspondant de la courbe (φ). Nous avons

$$\left(\begin{array}{c}\varphi \textit{ solution vérifiant} \\ \textit{la condition initiale } \varphi(t_0) = x_0\end{array}\right) \Leftrightarrow (\varphi = A\varphi).$$

Inspirons-nous du théorème des applications contractantes et étudions la suite des *approximations de Picard* $\varphi, A\varphi, A^2\varphi, \ldots$ (on peut par exemple commencer par $\varphi = x_0$).

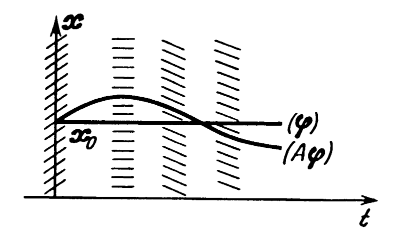


Fig. 216. Approximations picardiennes pour l'équation $\dot{x} = f(t)$

EXEMPLE 1. $\dot{x} = f(t)$ (fig. 216).

$$(A\varphi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Dans ce cas, la première approximation nous fournit la solution exacte.

EXEMPLE 2. $\dot{x} = x$, $t_0 = 0$ (fig. 217).

Dans ce cas on établit directement la convergence des approximations ; on a au point t :

$$\varphi = 1,$$

$$A\varphi = 1 + \int_0^t \mathrm{d}\tau = 1 + t,$$

$$A^2\varphi = 1 + \int_0^t (1 + \tau)\mathrm{d}\tau = 1 + t + \frac{t^2}{2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A^n\varphi = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \ldots + \frac{t^n}{n!},$$

$$\lim_{n\to\infty} A^n\varphi = e^t.$$

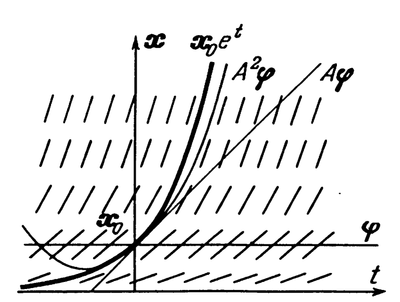


Fig. 217. Approximations picardiennes pour l'équation $\dot{x} = x$

REMARQUE 1. Ainsi, aux deux définitions de l'exponentielle

$$1)\ e^t = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n,$$

$$2)\ e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \dots$$

correspondent deux méthodes de résolution approchée de l'équation différentielle simple $\dot{x} = x$: la méthode d'Euler et la méthode des approximations successives de Picard. Historiquement, la première définition de l'exponentielle était simple :

3) e^t est la solution de l'équation $\dot{x} = x$ qui vérifie la condition initiale $x(0) = 1$.

REMARQUE 2. D'une façon analogue on démontrerait la convergence des approximations pour l'équation $\dot{x} = kx$. En général la convergence des approximations successives est due au fait que l'équation $\dot{x} = kx$ est « la pire des équations » en ce sens que les approximations successives d'une équation quelconque ne convergent pas plus lentement que celles d'une équation de la forme $\dot{x} = kx$.

Pour prouver la convergence des approximations successives, nous allons construire un espace métrique complet dans lequel l'application de Picard sera contractante.

Tout d'abord faisons quelques rappels d'analyse.

2. Majorations préliminaires.

1) *Norme.* Nous désignerons par $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$ la norme d'un vecteur $\boldsymbol{x}$ de l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$. L'espace $\mathbf{R}^n$, muni de la métrique $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$ est un espace métrique complet.

Citons deux inégalités importantes : l'inégalité triangulaire

$$|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \leqslant |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|$$

et l'inégalité de Schwartz

$$|(x, y)| \leqslant |x|\,|y| \text{ *)}.$$

2) *Intégrale vectorielle.* Soit $f : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ une fonction vectorielle à valeurs dans $\mathbf{R}^n$, continue sur $[a, b]$. L'intégrale vectorielle

$$I = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \in \mathbf{R}^n$$

est définie par la procédure habituelle (à l'aide des sommes).

LEMME.

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \left|\int_a^b |f(t)|\,dt\right|. \qquad (1)$$

Démonstration. D'après l'inégalité du triangle on a

$$\left|\sum f(t_i)\Delta_i\right| \leqslant \left|\sum f(t_i)\right| |\Delta_i|,$$

C.Q.F.D.

3) *Norme d'un opérateur.* Soit $A : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ un opérateur linéaire d'un espace euclidien $\mathbf{R}^m$ dans un autre espace euclidien $\mathbf{R}^n$. Nous désignerons la norme de cet opérateur par

$$|A| = \sup_{x \in \mathbf{R}^n \setminus 0} \frac{|Ax|}{x}.$$

Nous avons alors

$$|A + B| \leqslant |A| + |B|, \quad |AB| \leqslant |A|\,|B|. \qquad (2)$$

Si l'on pose $\varrho(A,B) = |A - B|$ l'ensemble des opérateurs linéaires de $\mathbf{R}^m$ dans $\mathbf{R}^n$ forme alors un espace métrique complet.

---

*) Rappelons la démonstration de ces inégalités. Soit le plan $\mathbf{R}^2$ engendré par les vecteurs x et y de l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$. Ce plan hérite sa structure euclidienne de $\mathbf{R}^n$. Or nous savons que ces inégalités sont démontrées en géométrie élémentaire. Elles sont donc valables dans tout espace euclidien et notamment dans $\mathbf{R}^n$. Sans le moindre calcul nous venons donc de montrer que

$$\left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right|^2 \leqslant \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i^2, \qquad \left|\int_a^b fg\,\mathrm{d}t\right|^2 \leqslant \int_a^b f^2\,\mathrm{d}t \int_a^b g^2\,\mathrm{d}t.$$

3. Condition de Lipschitz. Soient $A : M_1 \to M_2$ une application d'un espace métrique M_1 (muni d'une métrique ϱ_1) dans un espace métrique M_2 (muni d'une métrique ϱ_2) et L un nombre réel > 0.

DÉFINITION. On dit qu'une application A *satisfait à la condition de Lipschitz dans le rapport* L (et on écrit $A \in \operatorname{Lip} L$) si cette application dilate au plus de L fois la distance séparant deux points quelconques de M_1 (fig. 218) :

$$\varrho_2(Ax, Ay) \leqslant L\varrho_1(x, y) \, \forall x, y \in M_1.$$

Une application A *satisfait à la condition de Lipschitz* si existe une constante L telle que $A \in \operatorname{Lip} L$.

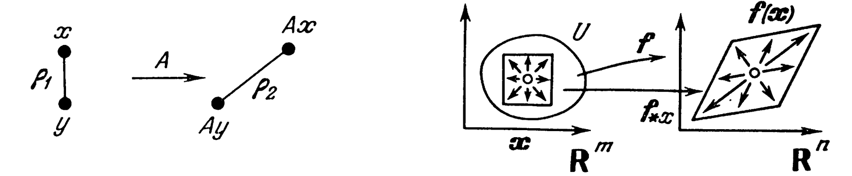


Fig. 218. Condition de Lipschitz : $\varrho_2 \leqslant L\varrho_1$

Fig. 219. Dérivée de l'application f

EXERCICE 1. Dire si les applications suivantes (la métrique sous-jacente est euclidienne) satisfont à la condition de Lipschitz.

1) $y = x^2$, $x \in \mathbf{R}$; 2) $y = \sqrt{x}$, $x > 0$; 3) $y = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$;

4) $y = \sqrt{x_1^2 - x_2^2}$, $x_1^2 \geqslant x_2^2$; 5) $y = \begin{cases} x \log x, & 0 < x \leqslant 1, \\ 0 & x = 0 ; \end{cases}$ 6) $y = x^2$, $x \in \mathbf{C}$, $|x| \leqslant 1$.

EXERCICE 2. Montrer que

la contraction $\Rightarrow$ *la condition de Lipschitz* $\Rightarrow$ *la continuité.*

4. Différentiabilité et condition de Lipschitz. Soit $f : U \to \mathbf{R}^n$ une application différentiable (de classe C^r, $r \geqslant 1$) d'un domaine U de l'espace euclidien $\mathbf{R}^m$ dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$ (fig. 219). Un espace, tangent en chacun de ses points à un espace euclidien, est lui-même muni d'une structure euclidienne. Donc la dérivée de f en $x \in U \subset \mathbf{R}^m$, que l'on note

$$f_{*x} : T_x\mathbf{R}^m \to T_{f(x)}\mathbf{R}^n,$$

est un opérateur linéaire de l'espace euclidien $T_x\mathbf{R}^m$ dans l'espace euclidien $T_{f(x)}\mathbf{R}^n$. On a de toute évidence le

THÉORÈME. *Une application continûment différentiable f, sur un compact convexe quelconque V de U, satisfait à la condition de Lipschitz dans*

un rapport L égal à la borne supérieure de la dérivée de

$$L = \sup_{x \in V} |f_{*x}|.$$

Démonstration. Joignons les points $x, y \in V$ par un segment (fig. 220), $z(t) = x + t(y - x)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. D'après la formule de Newton-Leibnitz on a

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(z(\tau)))\mathrm{d}\tau = \int_0^1 f_{*z(\tau)}\dot{z}(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

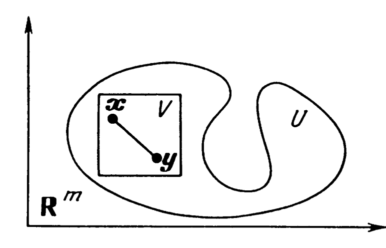


Fig. 220. La différentiabilité continue entraîne la satisfaction de la condition de Lipschitz

Les formules (1), (2) du pt. 2 et la relation $\dot{z} = y - x$ entraînent

$$\left|\int_0^1 f_{*z(\tau)}\dot{z}(\tau)\mathrm{d}\tau\right| \leqslant \int_0^1 L\,|y - x|\,d\tau = L\,|y - x|,$$

C.Q.F.D.

Remarque. La norme de la dérivée $|f_*|$ atteint son maximum sur V. En effet, $f \in C^1$ par hypothèse, la dérivée f_* est donc continue. Par conséquent $|f_*|$ atteint son maximum L sur le compact V.

Nous démontrerons dans la suite la convergence des approximations picardiennes dans un petit voisinage d'un point quelconque. Introduisons les quatre quantités suivantes pour décrire ce voisinage.

5. Les quantités C, L, a', b'. Supposons que le second membre de l'équation différentielle

$$\dot{x} = v(x, t) \tag{3}$$

soit défini et différentiable (de classe C^r, $r \geqslant 1$) sur un domaine U de l'espace des phases élargi $U \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^1$. Munissons $\mathbf{R}^n$, et, par conséquent, $T_x\mathbf{R}^n$, d'une structure euclidienne.

Soit $(x_0, t_0) \in U$ un point quelconque de U (fig. 221). Le cylindre

$$S = \{x, t : |t - t_0| \leqslant a,\ |x - x_0| \leqslant b\}$$

est contenu dans U pour a et b suffisamment petits. Désignons par C et

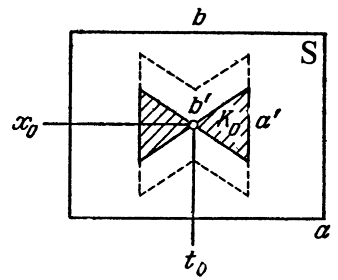



Fig. 221. Le cylindre S et le cône K_0

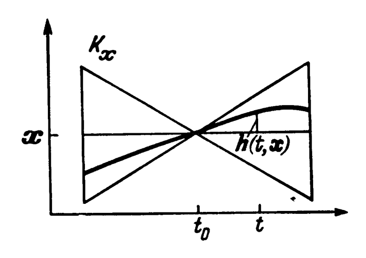


Fig. 222. Détermination de $h(x, t)$

L les bornes supérieures des grandeurs $|v|$ et $|v_*|$ *) sur ce cylindre. Ces valeurs sont atteintes vu que le cylindre est compact : $|v| \leqslant C$, $|v_*| \leqslant L$.

Soit K_0 un cône de sommet (x_0, t_0), de base C et de hauteur a' :

$$K_0 = \{x, t : |t - t_0| \leqslant a', \quad |x - x_0| \leqslant C|t - t_0|\}.$$

Si a' est suffisamment petit, le cône K_0 est situé à l'intérieur du cylindre S. Si a' et $b' > 0$ sont suffisamment petits, le cylindre S contient également tout cône K_x obtenu à partir de K_0 par une translation du sommet au point (x, t_0) où $|x - x_0| \leqslant b'$.

Supposons que a' et b' sont choisis si petits que $K_x \subset S$ et cherchons la solution φ de l'équation (3) qui vérifie la condition initiale $\varphi(t_0) = x$ sous la forme $\varphi(t) = x + h(x, t)$ (fig. 222).

La courbe intégrale correspondante est située à l'intérieur du cône K_x.

6. L'espace métrique M. Considérons les applications continues h du cylindre $|x - x_0| \leqslant b'$, $|t - t_0| \leqslant a'$ dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$. Par M nous désignerons l'ensemble des applications satisfaisant de plus à la condition

$$|h(x, t)| \leqslant C|t - t_0| \tag{4}$$

(et notamment $h(x, t_0) = 0$).

Munissons M de la métrique ϱ en supposant que

$$\varrho(h_1, h_2) = \|h_1 - h_2\| = \max_{\substack{|x - x_0| \leqslant b' \\ |t - t_0| \leqslant a'}} |h_1(x, t) - h_2(x, t)|.$$

THÉORÈME. *L'ensemble M muni de la métrique ϱ est un espace métrique complet.*

---

*) Ici et dans la suite l'astérisque signifie que la dérivée est prise (par rapport à x) pour t fixe.

Démonstration. Une suite uniformément convergente de fonctions continues converge vers une fonction continue. Si les fonctions de la suite vérifient l'inégalité (4), la fonction limite la vérifie également avec la même constante C.

On remarquera que l'espace M dépend des trois grandeurs strictement positives a', b', C.

7. Application contractante $A : M \to M$. Définissons une application $A : M \to M$ en posant*)

$$(Ah)(x, t) = \int_{t_0}^{t} v(x + h(x, \tau), \tau)\mathrm{d}\tau. \qquad (5)$$

En vertu de l'inégalité (4) le point $(x + h(x, \tau), \tau)$ appartient au cône K_x et, par conséquent, au domaine de définition du champ v.

THÉORÈME. *Si a' est suffisamment petit, la formule* (5) *définit une application contractante de l'espace M dans lui-même.*

Démonstration. 1. Montrons que *A envoie M dans lui-même.* La fonction Ah est continue, car l'intégrale d'une fonction continue dépendant continûment d'un paramètre dépend continûment de ce paramètre et de la borne supérieure. La fonction Ah satisfait à l'inégalité (4), car

$$|(Ah)(x, t)| \leqslant \left|\int_{t_0}^{t} v(\ldots)\mathrm{d}\tau\right| \leqslant \left|\int_{t_0}^{t} C\,\mathrm{d}t\right| \leqslant C|t - t_0|.$$

Donc $AM \subset M$.

2. Montrons que *l'application A est contractante :*

$$\|Ah_1 - Ah_2\| \leqslant \lambda\|h_1 - h_2\|, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Déterminons pour cela la valeur de $Ah_1 - Ah_2$ au point (x, t). Nous avons (fig. 223)

$$(Ah_1 - Ah_2)(x, t) = \int_{t_0}^{t} (v_1 - v_2)\mathrm{d}\tau,$$

où $v_i(\tau) = v(x + h_i(x, \tau), \tau)$, $i = 1, 2$.

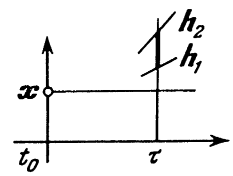


Fig. 223. Comparaison de v_1 et v_2

*) En procédant à une comparaison avec l'application de Picard du point 1, il ne faut perdre de vue que, désormais, la solution est cherchée sous la forme $x + h$.

Selon le théorème du pt. 4, la fonction $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, \tau)$, pour une valeur particulière de τ, satisfait à la condition de Lipschitz dans le rapport L (par rapport à $\boldsymbol{x}$). Donc

$$|\boldsymbol{v}_1(\tau) - \boldsymbol{v}_2(\tau)| \leqslant L/\boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{x}, \tau) - \boldsymbol{h}_2(\boldsymbol{x}, \tau)| \leqslant L\|\boldsymbol{h}_1 - \boldsymbol{h}_2\|.$$

D'après le lemme du pt. 2

$$|(A\boldsymbol{h}_1 - A\boldsymbol{h}_2)(\boldsymbol{x}, t)| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} L\|\boldsymbol{h}_1 - \boldsymbol{h}_2\| d\tau \right| \leqslant La'\|\boldsymbol{h}_1 - \boldsymbol{h}_2\|.$$

Lorsque $La' < 1$, l'application A est une application contractante.

Le théorème est démontré.

8. Théorème d'existence et d'unicité.

COROLLAIRE. *Supposons que le second membre* $\boldsymbol{v}$ *de l'equation différentielle* (3) *soit continûment différentiable au voisinage d'un point* $(t_0, \boldsymbol{x}_0)$ *de l'espace des phases élargi. Le point* $(t_0, \boldsymbol{x}_0)$ *possède alors un voisinage tel que l'équation* (3) *y admet une solution vérifiant la condition initiale* $\varphi(t_0) = \boldsymbol{x}$ où $\boldsymbol{x}$ *est un point quelconque suffisamment proche de* $\boldsymbol{x}_0$, *de plus, cette solution dépend continûment du point initial* $\boldsymbol{x}$.

Démonstration. D'après le théorème du § 30, l'application contractante A possède un point fixe $\boldsymbol{h} \in M$. Posons $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, t)$. Il vient alors

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{x} + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \tau), \tau) d\tau, \quad \frac{\partial \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, t), t).$$

Nous voyons que si l'on fixe $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{g}$ vérifie l'équation (3), et, pour $t = t_0$, la condition initiale $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, t_0) = \boldsymbol{x}$. La fonction $\boldsymbol{g}$ est continue, car $\boldsymbol{h} \in M$.

Ce que nous voulions.

Nous avons donc démontré le théorème d'existence pour l'équation (3) et trouvé une solution dépendant continûment des conditions initiales.

EXERCICE 1. Démontrer le théorème d'unicité.

Solution 1. Posons $b' = 0$ dans la définition de M. L'unicité du point fixe de l'application contractante $A : M \to M$ entraîne l'unicité de la solution (vérifiant la condition initiale $\varphi(t_0) = x_0$).

Solution 2. Soient φ_1 et φ_2 deux solutions vérifiant la même condition initiale $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$ et définies pour $|t - t_0| < \alpha$ et soit $0 < \alpha' < \alpha$. Posons

$$\|\varphi\| = \max_{|t - t_0| < \alpha'} \varphi(t).$$

Nous avons

$$\varphi_1(t) - \varphi_2(t) = \int_{t_0}^{t} v(\varphi_1(\tau), \tau) - v(\varphi_2(\tau), \tau) d\tau.$$

Pour α' suffisamment petit, les points $(\varphi_1(\tau), \tau)$ et $(\varphi_2(\tau), \tau)$ sont situés dans le cylindre où $v \in \mathrm{Lip}\, L$. Donc $\|\varphi_1 - \varphi_2\| \leqslant L\alpha' \|\varphi_1 - \varphi_2\|$, d'où $\|\varphi_1 - \varphi_2\| = 0$ lorsque $L\alpha' < 1$. Ainsi, les solutions φ_1 et φ_2 sont confondues dans un certain voisinage du point t_0.

Le théorème local d'unicité est démontré.

9. Autres exemples d'utilisation des applications contractantes.

Exercice 1. Démontrer le théorème des fonctions inverses.

Nota. Il suffit d'inverser au voisinage du point $0 \in \mathbf{R}^n$ une application de classe C^1, dont la partie linéaire est l'unité, $y = x + \varphi(x)$, où $\varphi'(0) = 0$ (le cas général se ramène à notre cas par un changement linéaire des coordonnées).

Cherchons la solution sous la forme $x = y + \psi(y)$. Nous obtenons alors pour ψ l'équation

$$\psi(y) = -\varphi(y + \psi(y)).$$

Par conséquent, la fonction inconnue ψ est le point fixe de l'application A définie par la formule

$$(A\psi)(y) = -\varphi(y + \psi(y)).$$

L' application A est contractante (pour une métrique convenable), car la dérivée de la fonction φ est petite au voisinage du point 0 (en raison de la condition $\varphi'(0) = 0$).

Exercice 2. Montrer qu'une ligne polygonale d'Euler tend vers une solution lorsque son pas tend vers zéro.

Solution. Soit $g_\Delta = x + h_\Delta$ une ligne polygonale d'Euler de pas Δ et d'origine $g_\Delta(x, t_0) = x$ (fig. 224). En d'autres termes, pour $t \neq t_0 + k\Delta$

$$\frac{1}{\partial t} \partial g_\Delta(x, t) = v(g_\Delta(x, s(t)), s(t)),$$

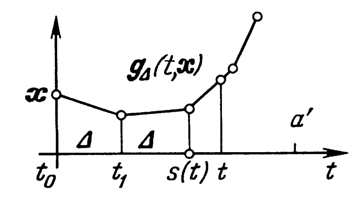


Fig. 224. Ligne polygonale d'Euler $g_\Delta(t, x)$

où $s(t) = t_0 + k\Delta$, k étant la partie entière de $(t - t_0)/\Delta$. Evaluons la différence entre la ligne polygonale d'Euler et la solution g d'après la formule du pt. 3, § 30 :

$$\|g_\Delta - g\| = \|h_\Delta - h\| \leqslant \frac{1}{1 - \lambda} \|Ah_\Delta - h_\Delta\|.$$

Or

$$(Ah_\Delta)(x, t) = \int_{t_0}^{t} v(g_\Delta(x, \tau), \tau)\mathrm{d}\tau,$$

$$h_\Delta(x, t) = \int_{t_0}^{t} v(g_\Delta(x, s(\tau)), s(\tau))\mathrm{d}\tau.$$

Lorsque $\Delta \to 0$, la différence des expressions sous le signe somme tend uniformément en τ, $|\tau| \leqslant a'$, vers 0 (par suite de l'équicontinuité de v). Donc $\|Ah_\Delta - h_\Delta\| \to 0$ lorsque $\Delta \to 0$ et la ligne polygonale d'Euler tend vers la solution.

EXERCICE* 3. Considérons un difféomorphisme A du voisinage du point 0 de $\mathbf{R}^n$ sur le voisinage du point 0 de $\mathbf{R}^n$, tel que 0 se transforme en 0. Supposons qu'en 0 la partie linéaire de A (i.e. l'opérateur linéaire $A_{*0}: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$) ne possède pas de valeurs propres de module 1. Soient m_- le nombre de valeurs propres de module $|\lambda| < 1$ et m_+ de module $|\lambda| > 1$. A_{*0} possède alors un sous-espace invariant $\mathbf{R}^{m_-}$ (variété invariante rentrante) et un sous-espace invariant $\mathbf{R}^{m_+}$ (variété invariante partante) dont les points tendent vers 0 sous l'action de A_{*0}^N, où $N \to +\infty$ (pour $\mathbf{R}^{m_-}$) ou bien $N \to -\infty$ (pour $\mathbf{R}^{m_+}$) (fig. 225).

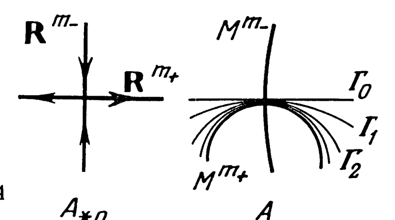


Fig. 225. Variétés invariantes de l'application A et partie linéaire A_{*0} de cette application

Montrer que l'*application non linéaire initiale A possède également au voisinage du point* 0 *des sous-variétés invariantes* M^{m_-} *et* M^{m_+} (*respectivement rentrante et partante*) *tangentes en* 0 *aux sous-espaces* $\mathbf{R}^{m_-}$ *et* $\mathbf{R}^{m_+}$ ($A^N x \to 0$ lorsque $N \to +\infty$ sur M^{m_-} et lorsque $N \to -\infty$ sur M^{m_+}).

Nota. Prendre une sous-variété quelconque Γ_0 de dimension m_+ (tangente par exemple en 0 à $\mathbf{R}^{m_+}$) et lui appliquer les puissances de A. Par la méthode des applications contractantes montrer que les approximations $\Gamma_N = A^N\Gamma_0$ ainsi obtenues tendent vers M^{m_+} lorsque $N \to +\infty$.

EXERCICE* 4. Prouver l'existence de la variété invariante rentrante et de la variété invariante partante pour le col non linéaire de $\dot{x} = v(x)$, $v(0) = 0$ (on suppose qu'aucune valeur propre de l'opérateur $A = v_*(0)$ n'est située sur l'axe imaginaire).

§ 32. Théorème de différentiabilité

L' objet de ce paragraphe est la démonstration du théorème de redressement.

1. Equation aux variations. A une application différentiable $f: U \to V$ est associée en tout point une application linéaire f_{*x} de l'espace tangent T_xU dans l'espace tangent $T_{f(x)}V$.

D'une façon analogue, à l'équation différentielle

$$\dot{x} = v(x, t) \quad x \in U \subset \mathbf{R}^n \tag{1}$$

est associé le système d'équations différentielle

$$\begin{cases} \dot{x} = v(x, t) & x \in U \subset \mathbf{R}^n, \\ \dot{y} = v_*(x, t)y, & y \in T_x v, \end{cases} \tag{2}$$

appelé *système d'équations aux variations* pour l'équation (1). Ce système est *linéaire* relativement au vecteur tangent y (fig. 226).

L' astérisque de la formule (2) (et dans la suite) signifie que la dérivée

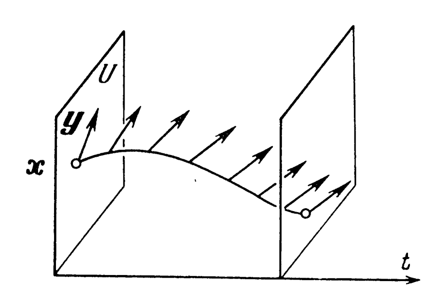


Fig. 226. Solution de l'équation aux variations avec la condition initiale (x, y)

est prise par rapport à x pour une valeur fixe de t. Ainsi, $v_*(x, t)$ est un opérateur linéaire dans $\mathbf{R}^n$.

Outre le système (2) il est commode de considérer le système

$$\begin{cases} \dot{x} = v(x, t), & x \in U \subset \mathbf{R}^n, \\ \dot{z} = v_*(x, t), z, & z : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n. \end{cases} \tag{3}$$

On obtient le système (3) à partir du système (2) en y remplaçant le vecteur inconnu y par une transformation linéaire inconnue z. Nous dirons que le système (3) est aussi un système *d'équations aux variations.*

Remarque. D'une façon générale, si est donnée une équation linéaire

$$\dot{y} = A(t)y, \quad y \in \mathbf{R}^n, \tag{2'}$$

il est utile de considérer l'équation associée

$$\dot{z} = A(t)z, \quad z : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n \tag{3'}$$

par rapport à un opérateur linéaire z dans $\mathbf{R}^n$.

Lorsqu'on connaît les solutions de l'une des équations (2′) et (3′), on déduit aisément les solutions de l'autre (indiquer comment).

2. Théorème de différentiabilité. *Supposons que le second membre v de l'équation* (1) *soit deux fois continûment différentiable dans un voisinage du point (x_0, t_0). La solution $g(x, t)$ de l'équation* (1) *qui vérifie la condition initiale $g(x, t_0) = x$ est continûment différentiable par rapport à la condition initiale x lorsque x et t varient dans un voisinage* (*qui peut être plus petit que le voisinage précédent*) *du point* (x_0, t_0) :

$$v \in C^2 \Rightarrow g \in C^1_x.$$

Démonstration. $v \in C^2 \Rightarrow v_* \in C^1$. Par conséquent, le système d'équations aux variations (3) satisfait aux conditions du § 31 et la suite des approximations picardiennes converge uniformément vers la solution de ce système dans un voisinage suffisamment petit du point t_0. Choisissons les conditions initiales $\varphi_0 = x$ (suffisamment proches de x_0), $\psi_0 = E$. Désignons

les approximations picardiennes par φ_n (pour x) et par ψ_n (pour z), i.e. posons

$$\varphi_{n+1}(x,\ t) = x + \int_{t_0}^{t} v(\varphi_n(x,\ \tau),\ \tau)\mathrm{d}\tau, \tag{4}$$

$$\psi_{n+1}(x,\ t) = E + \int_{t_0}^{t} v_*(\varphi_n(x,\ \tau),\ \tau)\psi_n(x,\ \tau)\mathrm{d}\tau. \tag{5}$$

Remarquons que $\varphi_{0*} = \psi_0$. Des définitions (4) et (5) on déduit par récurrence sur n que $\varphi_{n+1*} = \psi_{n+1}$. La suite $\{\psi_n\}$ est donc une suite des dérivées de la suite $\{\varphi_n\}$. Les deux suites (4) et (5) sont uniformément convergentes (étant des suites d'approximations picardiennes du système (3)) pour $|t - t_0|$ petit. Ainsi, la suite $\{\varphi_n\}$ converge uniformément avec les dérivées par rapport à x. Par conséquent, la fonction limite $g(x,\ t) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x,\ t)$ est continûment différentiable par rapport à x. C.Q.F.D.

REMARQUE. Nous avons incidemment démontré le

THÉORÈME. *La dérivée g_* d'une solution de l'équation* (1) *par rapport à la condition initiale x est solution de l'équation aux variations* (3) *avec la condition initiale $z(t_0) = E$* :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} g(x,\ t) = v(g(x,\ t),\ t), \\ \dfrac{\partial}{\partial t} g_*(x,\ t) = v_*(g(x,\ t),\ t)g_*(x,\ t), \\ g(x,\ t_0) = x, \quad g_*(x,\ t_0) = E. \end{cases}$$

Ce théorème explique le sens des équations aux variations : celles-ci décrivent l'effet des transformations, dans un intervalle de temps $(t_0,\ t)$ sur les vecteurs tangents à l'espace des phases (fig. 227).

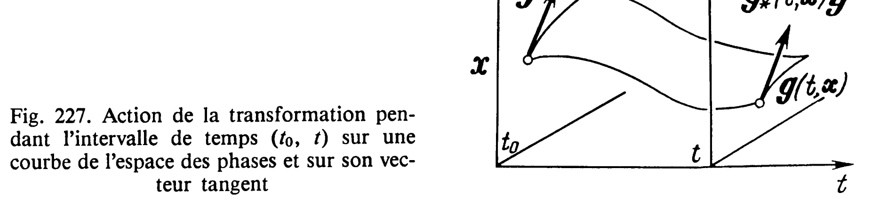


Fig. 227. Action de la transformation pendant l'intervalle de temps $(t_0,\ t)$ sur une courbe de l'espace des phases et sur son vecteur tangent

3. Dérivées d'ordre supérieur par rapport à x. Soit un nombre entier $r \geqslant 2$.

THÉORÈME T_r. *Supposons que le second membre v de l'équation* (1) *soit r fois continûment différentiable dans un voisinage du point* (x_0, t_0). *La solution $g(x, t)$ de l'équation* (1) *qui vérifie la condition initiale $g(x, t_0) = x$ est alors $r - 1$ fois continûment différentiable par rapport à la condition initiale x, lorsque x et t varient dans un voisinage (pouvant être plus petit que le précédent) du point* (x_0, t_0) :

$$v \in C^r \Rightarrow g \in C_x^{r-1}.$$

Démonstration. $v \in C^r \Rightarrow v_* \in C^{r-1}$. Par conséquent, le système d'équations aux variations (3) satisfait aux conditions du théorème T_{r-1}. Donc, le théorème T_r, $r > 2$, découle du théorème T_{r-1} :

$$v \in C^r \Rightarrow v_* \in C^{r-1} \Rightarrow g_* \in C_x^{r-2} \Rightarrow g \in C_x^{r-1}.$$

Or, le théorème T_2 a été prouvé au pt. 2. C.Q.F.D.

4. Dérivées par rapport à x et à t. Soit un nombre entier $r \geqslant 2$.

THÉORÈME T_r'. *Sous les conditions du théorème T_r, la solution $g(x, t)$ est une fonction $r - 1$ fois différentiable par rapport aux variables x et t simultanément* :

$$v \in C^r \Rightarrow g \in C^{r-1}.$$

Ce théorème est une conséquence immédiate du précédent. En voici la démonstration formelle.

LEMME. *Soit f une fonction à valeurs dans $\mathbf{R}^n$ définie sur le produit direct d'un domaine G de l'espace euclidien $\mathbf{R}^m$ par un intervalle I de l'axe t* :

$$f : G \times I \to \mathbf{R}^n.$$

Construisons l'intégrale

$$F(x, t) = \int_{t_0}^{t} f(x, \tau)\mathrm{d}\tau, \quad x \in G, \quad [t_0, t] \subset I.$$

Si $f \in C_x^r$ et $f \in C^{r-1}$, alors $F \in C^r$.

En effet, toute dérivée partielle d'ordre r de la fonction F par rapport aux variables x_i et t, contenant une dérivation par rapport à t s'exprime en fonction de f et des dérivées partielles de f d'ordre $< r$. Elle est donc continue. Par ailleurs, toute dérivée partielle d'ordre r par rapport aux variables x_i est continue par hypothèse.

Démonstration du théorème. On a

$$g(x, t) = x + \int_{t_0}^{t} v(g(x, \tau), \tau)\mathrm{d}\tau.$$

Posons $f(x, \tau) = v(g(x, \tau), \tau)$ et appliquons le lemme. On trouve pour $1 \leqslant \varrho \leqslant r$

$$g \in C^{\varrho-1} \cap C_x^{\varrho} \Rightarrow g \in C^{\varrho}.$$

D'après le théorème T_r, $g \in C_x^{\varrho}$ lorsque $\varrho < r$. On a

$$g \in C^0 \Rightarrow g \in C^1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow g \in C^{r-1}.$$

Or, d'après le § 31, $g \in C^0$ (la solution est continue par rapport à x et t). C.Q.F.D.

Exercice 1. Montrer que si le second membre de l'équation différentielle (1) est indéfiniment différentiable, toute solution est indéfiniment différentiable par rapport aux conditions initiales :

$$v \in C^{\infty} \Rightarrow g \in C^{\infty}.$$

Remarque. On démontre également que si le second membre v est analytique (i.e. se développe au voisinage de chaque point en une série de Taylor convergente vers v), alors la solution g est analytique en x et t.

Les équations différentielles dont le second membre est une fonction analytique doivent être étudiées aussi bien pour des valeurs complexes des inconnues que (ce qui est particulièrement important) pour des valeurs complexes du temps. On trouvera cette théorie, par exemple, dans le *Cours de théorie analytique des équations différentielles* par V. Goloubev (en russe), Gostechizdat, 1950.

5. Théorème de redressement. Ce théorème est une conséquence immédiate du théorème T_r'. Avant d'en entamer la démonstration rappelons deux propositions géométriques simples. Soient L_1 et L_2 deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel L (fig. 228). On dit que les sous-espaces L_1 et L_2 sont *transversaux* si leur somme est égale à l'espace L tout entier, ce qu'on note $L_1 + L_2 = L$. Exemple, dans $\mathbf{R}^3$ une droite est transversale à un plan si elle coupe ce plan sous un angle non nul.

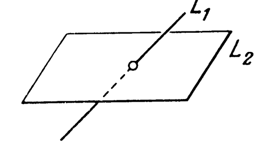


Fig. 228. La droite L_1 est transversale au plan L_2 dans l'espace $\mathbf{R}^3$

Proposition 1. *Chaque sous-espace $\mathbf{R}^k$ de dimension k de $\mathbf{R}^n$ possède dans $\mathbf{R}^n$ un sous-espace transversal de dimension $n - k$ (qui plus est même parmi les C_n^k plans arithmétiques de l'espace $\mathbf{R}^{n-k}$).*

Voir la démonstration dans les cours d'algèbre linéaire : *théorème du rang d'une matrice.*

Proposition 2. *Si une application linéaire $A : L \to M$ transforme deux*

sous-espaces transversaux quelconques en deux sous-espaces transversaux, elle est surjective.

Démonstration.

$$AL = AL_1 + AL_2 = M.$$

Démonstration du théorème de redressement : cas non autonome (voir chapitre 2, § 8, pt. 1.). Soit G une application d'un domaine du produit direct $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ dans l'espace des phases élargi de l'équation

$$\dot{x} = v(x, t), \tag{1}$$

définie par la formule $G(x, t) = (g(x, t), t)$ où $g(x, t)$ est la solution de l'équation (1) qui vérifie la condition initiale $g(x, t_0) = x$.

Montrons qu'au voisinage du point (x_0, t_0) l'application G^{-1} est un difféomorphisme redressant.

a) *L'application G est différentiable* (de classe C^{r-1} si $v \in C^r$) d'après le théorème T_r'.

b) *L'application G laisse t fixe* : $G(x, t) = (g(x, t), t)$.

c) *L'application G_* associe au champ de vecteur standard* $e(\dot{x} = 0, \dot{t} = 1)$ *le champ donné* : $G_* e = (v, 1)$ (puisque $g(x, t)$ est solution de l'équation (1)).

d) *L'application G est un difféomorphisme au voisinage du point* (x_0, t_0). Calculons en effet les restrictions de l'opérateur linéaire $G_*|_{t_0, x_0}$ aux plans transversaux $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{R}^1$ (fig. 229). On a

$$G_*|_{\mathbf{R}^n : t = t_0} = E, \quad G_*|_{\mathbf{R}^1 : x = x_0} e = v + e.$$

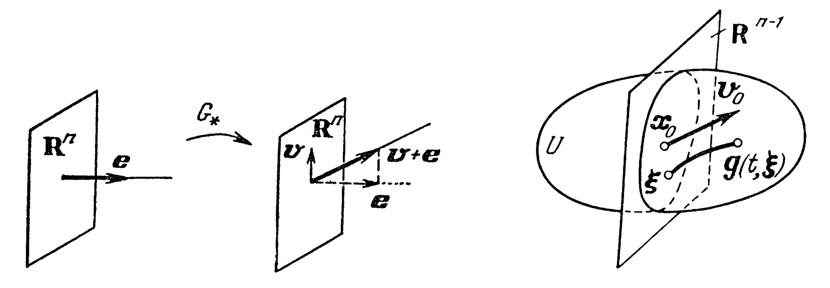


Fig. 229. Dérivée de l'application G au point (x_0, t_0)

Fig. 230. Construction du difféomorphisme redressant le champ de vecteurs

Le plan $\mathbf{R}^n$ et la droite de vecteur directeur $v + e$ sont transversaux. Donc G^* est une application linéaire de $\mathbf{R}^{n+1}$ dans lui-même, par conséquent, c'est un isomorphisme (le jacobien de G^* est différent de zéro au

point (x_0, t_0)). D'après le théorème des fonctions inverses, G est un difféomorphisme local.

C.Q.F.D.

Démonstration du théorème de redressement : cas autonome (§ 7, pt. 1). Soit l'équation autonome

$$\dot{x} = v(x), \quad x \in U \subset \mathbf{R}^n. \tag{6}$$

Supposons que le vecteur vitesse v_0 soit différent de zéro au point x_0 (fig. 230). Il existe alors un hyperplan $\mathbf{R}^{n-1} \subset \mathbf{R}^n$ de dimension $n - 1$ passant par x_0 et transversal à v_0 (d'une façon plus précise, le plan correspondant de l'espace tangent TU_{x_0} est transversal à la droite $\mathbf{R}^1$ contenant v_0).

Donnons-nous une application G d'un domaine de $\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}$, où $\mathbf{R}^{n-1} = \{\xi\}$, $\mathbf{R} = \{t\}$, dans un domaine de $\mathbf{R}^n$ par la formule $G(\xi, t) = g(\xi, t)$, où ξ est situé au voisinage de x_0 dans $\mathbf{R}^{n-1}$ et $g(\xi, t)$ est la valeur de la solution de l'équation (6) vérifiant la condition initiale $\varphi(0) = \xi$ à l'instant t. Montrons que G^{-1} est un difféomorphisme redressant dans un voisinage suffisamment petit du point $(\xi = x_0,\ t = 0)$.

a) *L'application G est différentiable* ($G \in C^{r-1}$ *si* $v \in C^r$) en vertu du théorème T_r'.

b) *L'application G^{-1} est redressante,* car G_* envoie le champ de vecteurs standard $\boldsymbol{e}(\dot{\xi} = 0, \dot{t} = 1)$ dans $G_*\boldsymbol{e} = v$ puisque $g(\xi, t)$ est solution de l'équation (6).

c) *L'application G est un difféomorphisme local.* Calculons en effet les restrictions de l'opérateur linéaire $G_*|_{x_0, t_0}$ aux plans transversaux $\mathbf{R}^{n-1}$ et $\mathbf{R}^1$. Ce qui donne

$$G_*|_{\mathbf{R}^{n-1}} = E, \quad G_*|_{\mathbf{R}^1}\boldsymbol{e} = v_0.$$

Donc, l'opérateur $G_*|_{x_0, t_0}$ transforme le couple de sous-espaces transversaux $\mathbf{R}^{n-1}$ et $\mathbf{R}^1 \subset \mathbf{R}^n$ en un couple de sous-espaces transversaux. $G_*|_{x_0, t_0}$ est donc une application linéaire de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$. Par conséquent, c'est un isomorphisme. D'après le théorème des fonctions inverses, G est un difféomorphisme local. C.Q.F.D.

Remarque. Etant donné que dans la démonstration du théorème de différentiabilité nous avons perdu une dérivée ($v \in C^r \Rightarrow g \in C^{r-1}$), pour les difféomorphismes redressants nous ne pouvons garantir que la classe de différentiabilité C^{r-1}. En réalité, le difféomorphisme redressant construit est de classe C^r ; la démonstration sera donnée dans la suite.

6. Dernière dérivée. Dans le théorème de différentiabilité (pt. 2) nous avons admis que le champ v était deux fois continûment différentiable. En réalité, il suffit d'une seule fois.

THÉORÈME. *Si le second membre $v(x, t)$ de l'équation différentielle $\dot{x} = v(x, t)$ est continûment différentiable, la solution $g(x, t)$ qui vérifie la condition initiale $g(x, t_0) = x$ est continûment différentiable par rapport aux conditions initiales :*

$$v \in C^1 \Rightarrow g \in C_x^1. \tag{7}$$

COROLLAIRES.

1) $v \in C^r \Rightarrow g \in C^r$ *pour* $r \geqslant 1$.

2) *Les difféomorphismes redressants du pt. 5 sont r fois continûment différentiables si* $v \in C^r$.

On déduit ces corollaires de la relation (7) en reprenant mot à mot les raisonnements des pt. 3, 4 et 5. La démonstration du théorème (7) nécessite quelques astuces.

Démonstration du théorème. Démontrons tout d'abord les

Lemme 1. *L'équation linéaire*

$$\dot{y} = A(t)y$$

dont le second membre est une fonction continue en t admet pour solution une fonction continue en y_0 et t, définie d'une manière unique par les conditions initiales $\varphi(t_0) = y_0$.

En effet, dans la démonstration du théorème d'existence, d'unicité et de continuité (§ 31), seule a été utilisée la différentiabilité par rapport à x pour t fixe (ou plus exactement la condition de Lipschitz sur x). Par conséquent, la démonstration est valable si l'on suppose que $A(t)$ n'est que continue en t. Le lemme est démontré.

Observons que la solution est linéaire en y_0 et continûment différentiable par rapport à t, elle est donc de classe C^1 par rapport à y_0 et t à la fois.

Lemme 2. *Si, dans le lemme* 1, *l'opérateur linéaire A dépend encore d'un paramètre α tel que la fonction $A(t, \alpha)$ soit continue, l'équation admettra pour solution une fonction continue de y_0, t et α.*

On peut, en effet, prendre pour solution la limite d'une suite d'approximations picardiennes. Chacune d'elles dépend continûment de y_0, t et α. Cette suite d'approximations est uniformément convergente en y_0, t et α dans un voisinage suffisamment petit d'un point quelconque (y_0, t_0, α_0). La limite est donc une fonction continue de y_0, t et α.

C.Q.F.D.

Appliquons le lemme 2 à l'équation aux variations.

LEMME 3. *Le système d'équations aux variations*

$$\begin{cases} \dot{x} = v(x, t), \\ \dot{y} = v_{*}, (x, t)y \end{cases}$$

admet une solution définie d'une manière unique par ses conditions initiales et continue en les mêmes conditions initiales, pourvu que $v \in C^1$.

En effet, la première équation du système admet une solution d'après le théorème d'existence du § 31. Cette solution est définie d'une manière univoque par ses conditions initiales x_0 et t_0 et est continue en x_0, t_0. Portons cette solution dans la deuxième équation. Nous obtenons une équation linéaire en y, dont le second membre est continu en t et en la condition initiale x_0, considérée ici comme un paramètre de la solution de la première équation.

D'après le lemme 2 cette équation linéaire admet une solution définie par ses conditions initiales y_0 et continue en t, y_0 et x_0.

Ce qui achève la démonstration du lemme 3.

Par conséquent, *les équations aux variations sont résolubles dans le cas aussi où* $v \in C^1$. Remarquons que dans le cas où $v \in C^2$ nous avons déjà démontré que la dérivée par rapport aux conditions initiales d'une solution était solution de l'équation aux variations (3). A présent nous ne sommes plus en état de l' affirmer, car nous ne savons pas encore si cette dérivée existe.

Pour montrer qu'une solution est différentiable par rapport aux conditions initiales voyons d'abord un cas particulier.

LEMME 4. *Si un champ de vecteurs* $v(x, t) \in C^1$ *s'annule avec sa dérivée* v_* *au point* $x = 0$ *quel que soit* t, *l'équation* $\dot{x} = v(x, t)$ *admet une solution différentiable au point* $x = 0$ *par rapport aux conditions initiales.*

En effet, par hypothèse $|v(x, t)| = o(|x|)$ au voisinage du point $x = 0$. Soit $x = \varphi(t)$ la solution vérifiant la condition initiale $\varphi(t_0) = x_0$. Estimons l'erreur d'approximation $x = x_0$ à l'aide de la formule du pt. 3, § 30. Pour des valeurs suffisamment petites de $|x_0|$ et $|t - t_0|$ on a

$$|\varphi - x_0| \leqslant \frac{1}{1 - \lambda} \left| \int_{t_0}^{t} v(x_0, \tau) d\tau \right| \leqslant K \max_{t_0 \leqslant \tau \leqslant t} |v(x_0, \tau)|,$$

où K est une constante indépendante de x_0.

Par conséquent $|\varphi - x_0| = o(|x_0|)$, d'où il vient que φ est différentiable par rapport à x_0 au point 0. C.Q.F.D.

Nous allons maintenant ramener le cas général à un cas particulier du lemme 4 : pour cela il nous suffit de choisir un système de coordonnées convenable dans l'espace des phases élargi. Nous pouvons toujours rendre triviale la solution considérée :

LEMME 5. *Soit* $x = \varphi(t)$ *une solution de l'équation* $\dot{x} = v(x, t)$ *dont le second membre* $v(x, t) \in C^1$ *est défini sur un domaine de l'espace des phases élargi* $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$. *Il existe alors un* C^1*-difféomorphisme de l'espace des phases élargi, conservant le temps* $((x, t) \mapsto$ $\mapsto (x_1(x, t), t))$ *et associant à la solution* φ *la solution* $x_1 \equiv 0$.

Il suffit, en effet, de réaliser la translation $x_1 = x - \varphi(t)$ vu que $\varphi \in C^1$. Ce qui démontre le lemme 5.

Dans le système de coordonnées (x_1, t) le second membre de notre équation s'annule en $x_1 = 0$. Montrons qu'il est également possible d'annuler la dérivée par rapport à x_1 du second membre par un changement de coordonnées convenable, linéaire en x.

LEMME 6. *Sous les conditions du lemme 5, les coordonnées* (x_1, t) *peuvent être choisies de telle sorte que l'équation* $\dot{x} = v(x, t)$ *soit équivalente à l'équation* $\dot{x}_1 = v_1(x_1, t)$, *où* v_1 *et sa dérivée* $\partial v_1/\partial x_1$ *s'annulent au point* $x_1 = 0$. *En outre, la fonction* $x_1(x, t)$ *peut être choisie linéaire (mais pas forcément homogène) en* x.

D'après le lemme 5 nous pouvons considérer que $v_1(0, t) = 0$.

Voyons d'abord un cas particulier du lemme 6 avant d'en aborder la démonstration.

LEMME 7. *L' assertion du lemme 6 vaut pour l'équation linéaire* $x = A(t)x$.

Il suffit de prendre pour x_1 la valeur, à l'instant fixe t_0, de la solution vérifiant la condition initiale $\varphi(t) = x$. D'après le lemme 1, $x_1 = B(t)x$, où $B(t) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ est un opérateur linéaire en t de classe C^1. Dans les coordonnées (x_1, t), notre équation linéaire s'écrit sous la forme $\dot{x}_1 = 0$.

Le lemme 7 est démontré.

Démonstration du lemme 6. Linéarisons l'équation $\dot{x} = v(x, t)$ en 0, i.e. composons l'équation aux variations

$$\dot{x} = A(t)x, \quad \text{où} \quad A(t) = v_*(0, t).$$

Par hypothèse $v \in C^1$, donc $A \in C^0$. D'après le lemme 7 on peut choisir C^1-coordonnées $x_1 = B(t)x$, de sorte que l'équation linéarisée s'écrive $\dot{x}_1 = 0$ dans les nouvelles coordonnées. On vérifie aisément que dans ce nouveau système de coordonnées le second membre de l'équation non linéaire initiale possède une partie linéaire nulle.

Posons en effet $V = Ax + \mathbf{R}$ (alors $\mathbf{R} = o(|x|)$) et $x = Cx_1$ (alors $C = B^{-1}$).

Dans l'équation $\dot{x} = v$ remplaçons x par Cx_1. Nous obtenons pour x_1 l'équation différentielle :

$$\dot{C}x_1 + C\dot{x}_1 = ACx_1 + \mathbf{R}.$$

Or, de par la définition même de C, les termes linéaires en x_1 sont égaux dans les deux membres. Donc

$$\dot{x}_1 = C^{-1}\mathbf{R}(Cx_1, t) = o(|x_1|).$$

Ce qui démontre le lemme 6.

En combinant les lemmes 6 et 4 on tire la conclusion suivante :

Lemme 8. *L'équation différentielle $\dot{x} = v(x, t)$, dont le second membre $v(x, t) \in C^1$, admet une solution z différentiable par rapport aux conditions initiales. La dérivée de cette solution par rapport aux conditions initiales est solution du système d'équations aux variations*

$$\dot{x} = v(x, t), \quad \dot{z} = v_*(x, t)z, \quad z(t_0) = E: \quad \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n.$$

Pour démontrer ce lemme il suffit d'écrire l'équation $\dot{x} = v(x, t)$ dans le système de coordonnées du lemme 6 et de lui appliquer le lemme 4.

Pour achever la démonstration du théorème il nous reste à nous assurer que la dérivée de la solution est bien continue en les conditions initiales. D'après le lemme 8 cette dérivée existe et est solution d'un système d'équations aux variations. D'après le lemme 3 les solutions de ce système sont continues en x_0 et t.

Ceci achève la démonstration du théorème.

CHAPITRE 5

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES SUR LES VARIÉTÉS

Dans ce chapitre on définit les variétés différentiables et on démontre le théorème d'existence du flot défini par un champ de vecteurs sur une variété.

La théorie des équations différentielles sur les variétés, connaît d'importants et intéressants développements que, malheureusement, nous n'aborderons pas dans ce chapitre qui n'est qu'une brève introduction à cette branche, jonction de l'analyse et de la topologie.

§ 33. Variétés différentiables

La notion de variété différentiable est en géométrie et en analyse aussi fondamentale que la notion de groupe et d'espace vectoriel en algèbre.

1. Exemples de variétés. Parmi les variétés qui seront définies plus bas citons (fig. 231) :

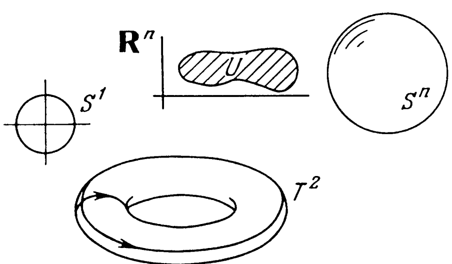


Fig. 231. Exemples de variétés

1. L' espace vectoriel $\mathbf{R}^n$ ou l'un quelconque de ses domaines (un sous-espace ouvert) U.

2. La sphère S^n définie dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^{n+1}$ par l'équation

$$x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1.$$

Et notamment, le cercle S^1.

3. Le tore $T^2 = S^1 \times S^1$ (voir § 24).

4. L' espace projectif

$$\mathbf{RP}^n = \{(x_0 : x_1 : \ldots : x_n)\}.$$

Rappelons que les points de cet espace sont des droites passant par l'origine des coordonnées dans $\mathbf{R}^{n+1}$. Une telle droite est donnée par l'un quelcon-

que de ses points (différent de 0). Les coordonnées $(x_0, \ldots, x_n)$ de ce point dans $\mathbf{R}^{n+1}$ sont appelées coordonnées homogènes du point correspondant de l'espace projectif.

Le dernier exemple est particulièrement instructif. Dans les définitions suivantes il est utile de se rappeler les coordonnées affines dans un espace projectif (voir plus bas l'exemple 3 du pt. 3).

2. Définitions. Une *variété différentiable* M est un ensemble M muni d'une structure de variété différentiable.

On dit qu'un ensemble M est muni d'*une structure de variété* si on y a défini *un atlas* composé de *cartes compatibles.*

DÉFINITION 1. Par *carte* on désigne un domaine $U \subset \mathbf{R}^n$ et une application bijective $\varphi : W \to U$ d'une partie W de l'ensemble M sur U (fig. 232). Nous appellerons $\varphi(x)$ *l'image* sur la carte U d'un point $x \in W \subset M$.

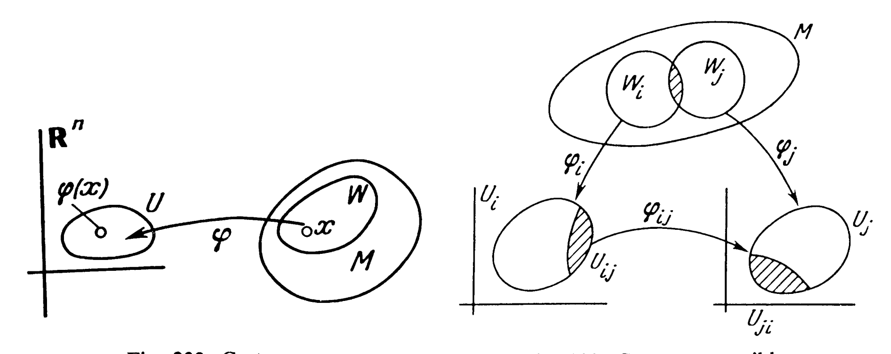


Fig. 232. Carte

Fig. 233. Cartes compatibles

Soient les cartes (fig. 233)

$$\varphi_i: \quad W_i \to U_i \quad \text{et} \quad \varphi_j: \quad W_j \to U_j.$$

Si elle n'est pas vide, l'intersection $W_i \cap W_j$ des ensembles W_i et W_j possède des images sur les deux cartes :

$$U_{ij} = \varphi_i(W_i \cap W_j),$$
$$U_{ji} = \varphi_j(W_j \cap W_i).$$

On passe d'une carte à l'autre par une application de *sous-ensembles d'espaces vectoriels*

$$\varphi_{ij}: \quad U_{ij} \to U_{ji}, \quad \varphi_{ij}(x) = \varphi_j(\varphi_i^{-1}(x)).$$

DÉFINITION 2. Deux cartes

$$\varphi_i: \quad W_i \to U_i, \quad \varphi_j: \quad W_j \to U_j$$

sont dites *compatibles* si

1) les ensembles U_{ij} et U_{ji} sont ouverts (éventuellement vides) ;

2) les applications φ_{ij} et φ_{ji} (définies si $W_i \cap W_j \neq \emptyset$) sont des difféomorphismes de domaines de $\mathbf{R}^n$.

Remarque. On obtient différentes classes de variétés selon la classe de différentiabilité des applications φ_{ij}.

Si par difféomorphisme on entend un difféomorphisme de classe C^r, $1 \leqslant r \leqslant \infty$, on dira de la variété, qui sera définie plus bas, que c'est une *variété différentiable* de classe C^r. Si l'on pose $r = 0$, ce qui revient à exiger seulement que φ_{ij} soient des homéomorphismes, on obtient alors la définition *d'une variété topologique.* Si, enfin, on exige que φ_{ij} soient des fonctions analytiques*), on a alors une *variété analytique.*

On connaît d'autres exemples de variétés. Ainsi, si l'on fixe une orientation dans $\mathbf{R}^n$ et que l'on exige que les difféomorphismes φ_{ij} conservent cette orientation (i.e. le jacobien $\varphi_{ij} > 0$ en chaque point), on obtient alors la définition d'*une variété orientée.*

Définition 3. Un ensemble de cartes $\varphi_i : W_i \to U_i$ s'appelle *atlas* sur M si

1) deux cartes quelconques sont compatibles ;

2) tout point $x \in M$ possède une image sur au moins une carte.

Définition 4. Deux atlas sur M sont *équivalents* si leur union est de nouveau un atlas (i.e. si une carte quelconque du premier atlas est compatible avec une carte quelconque du second).

Il est aisé de voir que la définition 4 définit visiblement une relation d'équivalence.

Définition 5. On appelle *structure de variété différentiable* sur M une classe d'atlas équivalents.

Citons deux conditions souvent imposées aux variétés afin d'éviter toute pathologie.

1. *Séparabilité* : deux points quelconques x et $y \in M$ possèdent des voisinages disjoints (fig. 234). Autrement dit, soit il existe deux cartes

$$\varphi_i : \quad W_i \to U_i, \quad \varphi_j : \quad W_j \to U_j,$$

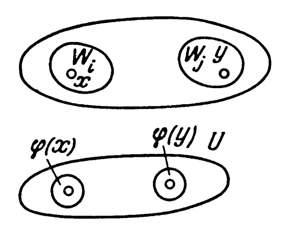


Fig. 234. Séparabilité

*) On rappelle qu'une fonction est analytique si elle est développable en séries entières au voisinage de tout point.

telles que les sous-ensembles W_i et W_j qui contiennent respectivement x et y sont disjoints, soit il existe une carte sur laquelle sont représentés les deux points x et y.

Si la condition de séparabilité n'est pas exigée, alors l'ensemble obtenu à partir des deux droites $\mathbf{R} = \{x\}$ et $\mathbf{R} = \{y\}$ par une identification des points d'égales coordonnées négatives x, y sera une variété. Sur une telle variété le théorème d'unicité du prolongement des solutions d'une équation différentielle est mis en défaut, bien que le théorème local d'unicité soit vrai.

2. *Dénombrabilité* : il existe un atlas M formé d'un nombre au plus dénombrable de cartes.

Dans la suite le terme « variété » désignera une variété différentiable remplissant les conditions de séparabilité et de dénombrabilité.

3. Exemples d'atlas.

1. La sphère S^2 définie par l'équation $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ dans $\mathbf{R}^3$ peut être munie d'un atlas de deux cartes exécutées en projection stéréographique par exemple (fig. 235). Dans ce cas

$$W_1 = S^2 \setminus N, \quad U_1 = \mathbf{R}_1^2 ;$$
$$W_2 = S^2 \setminus S, \quad U_2 = \mathbf{R}_2^2 .$$

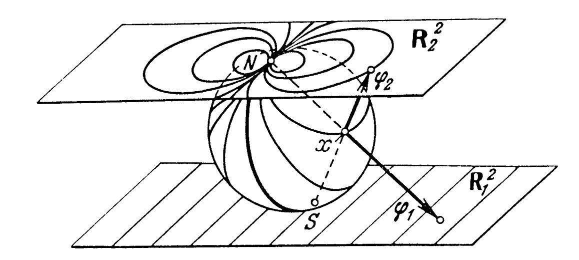


Fig. 235. Atlas de la sphère. La famille des cercles de la sphère tangents en N est représentée sur la carte inférieure par une famille de droites parallèles, et sur la carte supérieure, par une famille de cercles tangents

EXERCICE 1. Ecrire les formules des applications φ_1, φ_2 et vérifier que nos deux cartes sont bien compatibles.

D'une façon analogue on peut définir une structure différentiable sur S^n avec un atlas de deux cartes.

2. L'atlas du tore T^2 se construit à l'aide des coordonnées angulaires : la latitude φ et la longitude ψ (fig. 236). On peut, par exemple, considérer 4 cartes correspondant aux variations de φ et ψ dans les intervalles

$$0 < \varphi < 2\pi, \quad -\pi < \varphi < \pi,$$
$$0 < \psi < 2\pi, \quad -\pi < \psi < \pi.$$

3. L'atlas du plan projectif $\mathbf{RP}^2$ peut être composé de trois « cartes affines » (fig. 237) :

$$x_0 : x_1 : x_2 \begin{array}{l} \xrightarrow{\varphi_0} y_1 = \dfrac{x_1}{x_0},\ y_2 = \dfrac{x_2}{x_0} \quad \text{si} \quad x_0 \neq 0, \\ \xrightarrow{\varphi_1} z_1 = \dfrac{x_0}{x_1},\ z_2 = \dfrac{x_2}{x_1} \quad \text{si} \quad x_1 \neq 0, \\ \xrightarrow{\varphi_2} u_1 = \dfrac{x_0}{x_2},\ u_2 = \dfrac{x_1}{x_2} \quad \text{si} \quad x_2 \neq 0. \end{array}$$

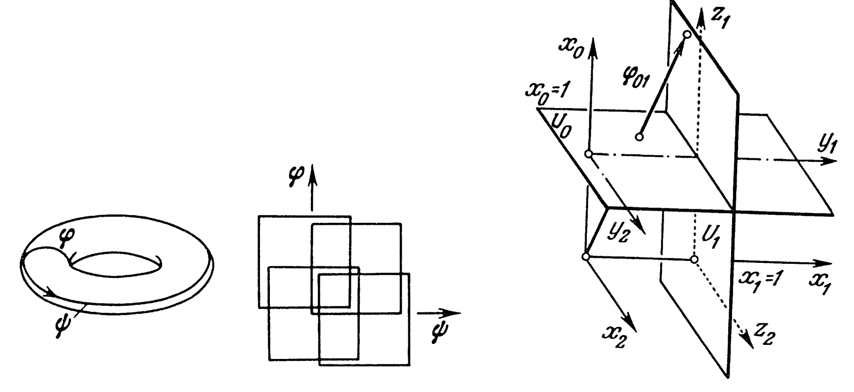


Fig. 236. Atlas du tore

Fig. 237. Cartes affines du plan projectif

Ces cartes sont compatibles. La compatibilité de φ_0 et φ_1 signifie par exemple que l'application $\varphi_{0,1}$ du domaine $U_{0,1} = \{y_1, y_2 : y_1 \neq 0\}$ du plan (y_1, y_2) sur le domaine $U_{1,0} : z_1 \neq 0$ du plan (z_1, z_2), définie par les formules $z_1 = y_1^{-1}$, $z_2 = y_2 y_1^{-1}$, est un difféomorphisme (fig. 238).

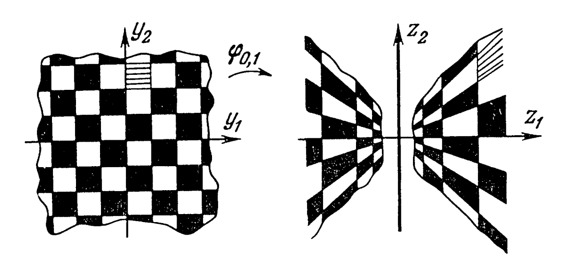


Fig. 238. Compatibilité des cartes du plan projectif

Démonstration : $y_1 = z_1^{-1}$, $y_2 = z_2 z_1^{-1}$.

De la même manière, dans l'espace projectif $\mathbf{RP}^n$, une structure différentiable est définie par un atlas de $n + 1$ cartes affines.

4. Compacité.

Définition. Un sous-ensemble G d'une variété M est *ouvert* si son image $\varphi(W \cap G)$ sur chaque carte $\varphi : W \to U$ est un sous-ensemble ouvert d'un domaine U d'un espace vectoriel (fig. 239).

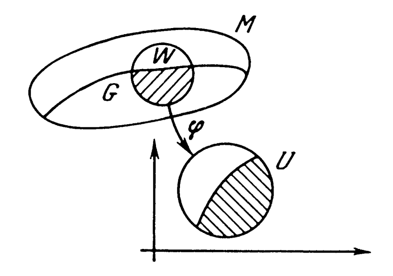


Fig. 239. Sous-ensemble ouvert

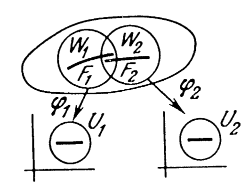


Fig. 240. Sous-ensemble compact

Exercice 1. Montrer que l'intersection de deux et l'union d'un nombre quelconque de sous-ensembles ouverts d'une variété sont ouvertes.

Définition. Un sous-ensemble K d'une variété M est *compact* si tout recouvrement ouvert de K admet un sous-recouvrement fini.

Exercice 2. Montrer que la sphère S^n est compacte. Peut-on dire autant de l'espace projectif $\mathbf{RP}^n$?

Nota. On pourra se servir du théorème suivant

Théorème. *Supposons qu'un sous-ensemble F d'une variété M* (fig. 240) *soit l'union d'un nombre fini de sous-ensembles F_i possédant chacun une image compacte sur l'une des cartes $F_i \subset W_i$, $\varphi_i : W_i \to U_i$, $\varphi_i(F_i)$ étant un compact dans $\mathbf{R}^n$.*

Sous ces hypothèses F est compact.

Démonstration. Supposons que $\{G_j\}$ soit un recouvrement ouvert de l'ensemble F. Alors quel que soit i, $\{\varphi_i(G_j \cap W_i)\}$ est un recouvrement ouvert du compact $\varphi_i(F_i)$. Extrayons de ce recouvrement un sous-recouvrement fini. Si l'on fait parcourir à j l'ensemble fini de ces valeurs, on obtient un nombre fini de G_j recouvrant F.

5. Connexité et dimension.

Définition. On dit qu'une variété M est *connexe* (fig. 241) si deux quelconques de ses points x et y sont reliés par une chaîne de cartes φ_i : $W_i \to U_i$ telles que $x \in W_1$; $y \in W_n$; $W_i \cap W_{i+1} \neq \varnothing\ \forall i$ et U_i soit connexe*).

*) C'est-à-dire que deux points quelconques de $U_i \subset \mathbf{R}^n$ peuvent être joints par une ligne polygonale.

Si une variété M n'est pas connexe elle se décompose tout naturellement en composantes connexes M_i.

EXERCICE 1. On demande si sont connexes les variétés définies dans $\mathbf{R}^3$ (puis dans $\mathbf{RP}^3$) par les équations

$$x^2 + y^2 - z^2 = C, \quad C \neq 0.$$

EXERCICE 2. L'ensemble de toutes les matrices régulières d'ordre n possède une structure naturelle de variété différentiable (domaine de $\mathbf{R}^{n^2}$). Combien de composantes connexes possède cette variété ?

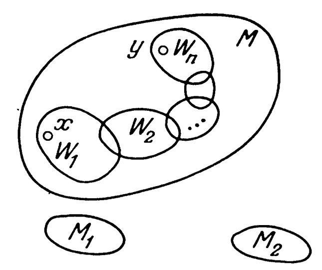


Fig. 241. Variété connexe M et variété non connexe $M_1 \cup M_2$

THÉORÈME. *Soient M une variété connexe, $\varphi_i : W_i \to U_i$ ses cartes. Les espaces vectoriels $\mathbf{R}^n$ contenant les domaines U_i sont tous de même dimension.*

Démonstration. Cette assertion découle, d'une part, du fait que des domaines d'espaces vectoriels ne peuvent être difféomorphes que si ces espaces sont de même dimension et, d'autre part, du fait que deux domaines quelconques W_i et W_j de la variété connexe M peuvent être joints par une chaîne finie de domaines dont les intersections sont deux à deux non vides.

Le nombre n défini dans le théorème est appelé *dimension* de la variété M. On le désigne par $\dim M$.

EXEMPLE : $\dim \mathbf{R}^n = \dim S^n = \dim T^n = \dim \mathbf{RP}^n = n$.

Une variété non connexe est de dimension n si toutes ses composantes connexes le sont.

EXERCICE 3. Munir l'ensemble $O(n)$ des matrices orthogonales d'ordre n d'une structure de variété différentiable. Trouver ses composantes connexes et leur dimension.

Réponse. $O(n) = SO(n) \times Z_2$, $\dim O(n) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

6. Applications différentiables.

DÉFINITION. Une application $f : M_1 \to M_2$ d'une C^r-variété M_1 dans une C^r-variété M_2 est *différentiable* (de classe C^r) si elle est définie dans les coordonnées locales sur M_1 et M_2 par des fonctions différentiables (de classe C^r).

Autrement dit, soient $\varphi_1 : W_1 \to U_1$ une carte de M_1 représentant un point $x \in W_1$ et $\varphi_2 : W_2 \to U_2$ une carte de M_2 représentant le point $f(x) \in W_2$ (fig. 242). L'application $\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1}$ définie au voisinage du point $\varphi_1(x)$ est alors un élément de C^r.

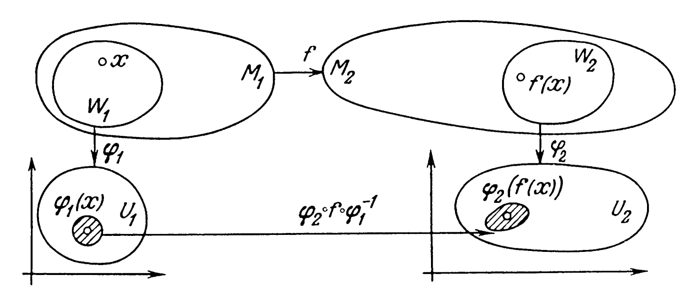


Fig. 242. Application différentiable

Exemple 1. La projection d'une sphère sur un plan (fig. 243) est une application différentiable $f: S^2 \to \mathbf{R}^2$.

Nous constatons donc que l'image d'une application différentiable n'est pas forcément une variété différentiable.

Exemple 2. Sur une variété M, on appelle *courbe**) issue d'un point

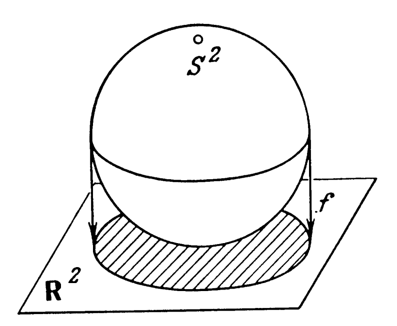


Fig. 243. La projetée de la sphère sur le plan est un disque fermé

*) Ou *courbe paramétrée*, étant donné qu'on appelle parfois courbes sur M les sous-variétés à une dimension de la variété M (voir définition plus bas dans le point 8). Une courbe paramétrée peut présenter des points crunodaux, des points de rebroussement, etc. (fig. 244).

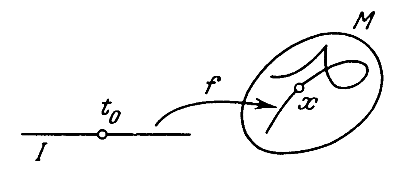


Fig. 244. Courbe sur une variété M

$x \in M$ à l'instant t_0 une application différentiable $f : I \to M$ d'un intervalle I contenant t_0 de l'axe réel t dans la variété M, et telle que $f(t_0) = x$.

EXEMPLE 3. On appelle *difféomorphisme* $f : M_1 \to M_2$ d'une variété M_1 sur une variété M_2 une application différentiable f dont l'application inverse $f^{-1} : M_2 \to M_1$ existe et est différentiable.

Des variétés M_1 et M_2 sont *difféomorphes* s'il existe un difféomorphisme de l'une sur l'autre. Exemple : une sphère et un ellipsoïde sont difféomorphes.

7. Remarque. Il est facile de voir que toute variété connexe à une dimension est difféomorphe à un cercle (si cette variété est compacte) ou à une droite (si elle ne l'est pas).

Comme exemples de variétés à deux dimensions citons la sphère, le tore (difféomorphe à une « sphère à une anse ») et la « sphère à n anses » (fig. 245).

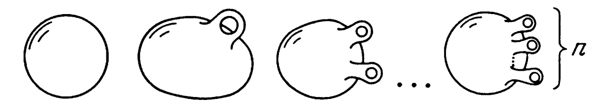


Fig. 245. Variétés à deux dimensions non difféomorphes

En topologie, on démontre que toute variété à deux dimensions connexe, compacte et orientable est difféomorphe à une sphère à $n \geqslant 0$ anses. On connaît peu de choses sur les variétés à trois dimensions. On ignore, par exemple, si toute variété compacte, simplement connexe*), à trois dimensions est difféomorphe à une sphère S^3 (*hypothèse de Poincaré*), ou au moins est homéomorphe à cette sphère.

Lorsque les dimensions sont grandes, les classifications différentiable et topologique des variétés ne coïncident pas. Ainsi, il existe très exactement 28 variétés différentiables, homéomorphes à une sphère S^7, mais non difféomorphes entre elles. On les appelle *sphères de Milnor.*

Dans $\mathbf{C}^5$ muni des coordonnées $z_1, \ldots, z_5$ on peut définir une sphère de Milnor à l'aide des deux équations suivantes :

$$z_1^{6k-1} + z_2^3 + z_3^2 + z_4^2 + z_5^2 = 0, \quad |z_1|^2 + \ldots + |z_5|^2 = 1.$$

Pour $k = 1, 2, \ldots, 28$ nous obtenons 28 sphères de Milnor**). L' une de ces 28 variétés est difféomorphe à la sphère S^7.

8. Sous-variétés. La sphère définie par l'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ dans $\mathbf{R}^3$ nous fournit un exemple de sous-ensemble d'un espace euclidien. Ce sous-ensemble tient de l'espace euclidien sa structure naturelle de variété

*) Une variété est simplement connexe si tout contour fermé peut être continûment réduit à un point.

**) Voir Brieskorn Egbert, *Beispiele zur Differential Topologie von Singularitäten*, Inventiones Mathematical, 2, (1966), N° 16, 1-14.

différentiable : une structure de *sous-variété* de $\mathbf{R}^3$. La définition générale d'une sous-variété est la suivante :

DÉFINITION. Un sous-ensemble V d'une variété M (fig. 246) est une *sous-variété* si tout point $x \in V$ possède un voisinage W dans M et une carte $\varphi : W \to U$ tels que $\varphi(W \cap V)$ soit un domaine d'un *sous-espace* affine de l'espace affine $\mathbf{R}^n$ contenant U.

La *sous-variété* V possède elle-même une structure naturelle de variété ($W' = W \cap V$, $U' = \varphi(W')$).

Nous allons énoncer le théorème fondamental suivant sans le démontrer et sans nous en servir dans la suite.

THÉORÈME. *Toute variété M^n est difféomorphe à une sous-variété d'un espace euclidien $\mathbf{R}^N$ de dimension suffisamment grande (il suffit de prendre $N > 2n$ par exemple, où $n = \dim M^n$).*

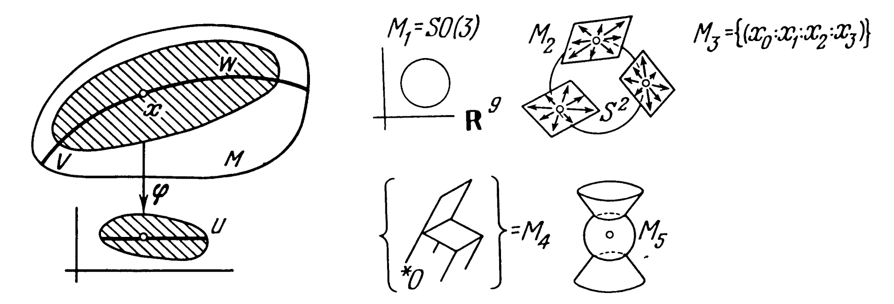


Fig. 246. Sous-variété

Fig. 247. Exemples de variétés à trois dimensions

Donc la notion abstraite de variété englobe en réalité un nombre d'objets pas plus grand que les « surfaces de dimension n dans un espace de dimension N ». L'approche abstraite offre l'avantage de traiter d'emblée les cas où aucun plongement n'a été fait à priori dans un espace euclidien, l'utilisation de ce dernier n'entraînant que des complications inutiles (exemple : l'espace projectif $\mathbf{RP}^n$). La situation est ici la même que pour les espaces vectoriels de dimension finie (qui sont tous isomorphes à l'espace arithmétique $\{(x_1, \ldots, x_n)\}$, alors que l'utilisation des coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ ne fait souvent que compliquer les choses).

9. Exemple. Examinons en conclusion cinq variétés intéressantes (fig. 247).

$M_1 = SO(3)$ désigne le *groupe des matrices orthogonales* d'ordre 3 et de déterminant +1. Puisque toute matrice est composée de 9 éléments, M_1 est un sous-ensemble de l'espace $\mathbf{R}^9$. Il est facile de voir que ce sous-ensemble est en réalité une sous-variété.

$M_2 = T_1S^2$ désigne l'*ensemble des vecteurs de longueur 1, tangents à la sphère S^2* dans l'espace euclidien à trois dimensions. Le lecteur est invité à munir cet ensemble d'une structure de variété différentiable (cf. § 34).

$M_3 = \mathbf{RP}^3$ désigne *un espace projectif à trois dimensions.*
M_4 représente *l'espace de configuration d'un solide* suspendu à un point fixe O.
M_5 désigne *la sous-variété de l'espace* $\mathbf{R}^6 = {}^{\mathbf{R}}\mathbf{C}^3$ *définie par les équations*

$$\begin{cases} z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0, \\ |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 = 2. \end{cases}$$

EXERCICE* 1. Des variétés M_1 à M_5 indiquer celles qui sont difféomorphes.

§ 34. Fibré tangent. Champs de vecteurs sur une variété

A toute variété différentiable M est associée une autre variété (de dimension double) appelée *fibré tangent**) à M et notée TM. Le fibré tangent nous permet immédiatement de transposer aux variétés toute la théorie des équations différentielles ordinaires.

1. Espace tangent. Soit une variété différentiable M. On appelle *vecteur* ξ *tangent en* x *à* M la classe d'équivalence des courbes issues du point x ; deux courbes (fig. 248)

$$\gamma_1 : \quad I \to M, \quad \gamma_2 : \quad I \to M$$

sont équivalentes si leurs images le sont sur une carte quelconque

$$\varphi\gamma_1 : \quad I \to U, \quad \varphi\gamma_2 : \quad I \to U.$$

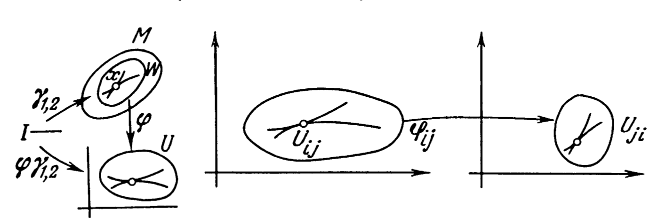


Fig. 248. Vecteur tangent

Remarquons que la notion d'équivalence des courbes est indépendante du choix de la carte dans l'atlas (voir § 5) : en effet, l'équivalence sur une carte φ_i entraîne celle sur une carte quelconque φ_j, étant donné qu'on passe d'une carte à une autre par un difféomorphisme.

L'ensemble des vecteurs tangents en x à M est muni d'une structure d'espace vectoriel, indépendante du choix de la carte (voir § 5). Cet espace vectoriel est appelé *espace tangent en* x *à* M et noté TM_x. Il a même dimension que M.

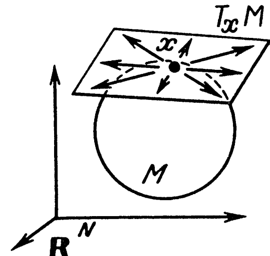
*) Le fibré tangent est un cas particulier du fibré vectoriel et de la notion plus générale encore d'espace fibré. Toutes ces notions sont fondamentales en topologie et en analyse. Pour notre part, nous nous limiterons au fibré tangent qui est particulièrement important pour la théorie des équations différentielles *ordinaires.*

EXEMPLE. Soit M^n une sous-variété d'un espace affine $\mathbf{R}^N$ (fig. 249). On peut alors représenter T_xM^n comme un plan de dimension n de $\mathbf{R}^N$, passant par x. Il convient toutefois de ne pas perdre de vue que *des espaces tangents à M en des points x et y distincts sont disjoints* : $T_xM \cap T_yM = \varnothing$.

2. Fibré tangent. Considérons l'union des espaces tangents à une variété M en tous ses points

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_xM.$$

L'ensemble TM est muni d'une structure naturelle de variété différentiable.



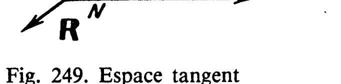


Fig. 249. Espace tangent

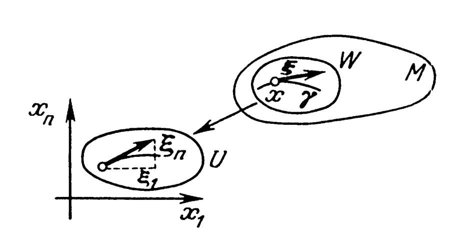


Fig. 250. Coordonnées du vecteur tangent

Considérons une carte quelconque sur une variété M et soient $(x_1, \ldots, x_n) : W \to U \subset \mathbf{R}^n$ (fig. 250) des coordonnées locales définissant cette carte au voisinage W d'un point x.

Tout vecteur ξ tangent à M en $x \in W$ est défini par ses composantes $\xi_1, \ldots, \xi_n$ dans le système de coordonnées mentionné. Plus exactement si $\gamma : I \to M$ est une courbe partant de x à l'instant t_0 et dirigée par ξ, alors

$$\xi_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=t_0} x_i(\gamma(t)).$$

Donc, tout vecteur ξ tangent à M en un point quelconque de W est défini par $2n$ nombres $(x_1, \ldots, x_n)$, $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, c'est-à-dire par les n coordonnées du « point d'application » x et par les n « composantes » ξ_i.

Nous avons ainsi obtenu une carte d'une partie de l'ensemble TM :

$$\psi : \quad TW \to \mathbf{R}^{2n}, \quad \psi(\xi) = (x_1, \ldots, x_n, \quad \xi_1, \ldots, \xi_n).$$

Les cartes de TM correspondant aux cartes de l'atlas de M sont compatibles (elles sont de classe C^{r-1} si celles de M sont de classe C^r). Soient en effet $y_1, \ldots, y_n$ un autre système local de coordonnées sur M et $\eta_1, \ldots, \eta_n$ les composantes d'un vecteur dans ce système ; alors

$$y_i = y_i(x_1, \ldots, x_n), \quad \eta_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \xi_j \quad (i = 1, \ldots, n)$$

sont des fonctions différentiables par rapport à x_j et ξ_j.

Ainsi donc, l'ensemble TM des vecteurs tangents à M a été muni d'une structure de variété différentiable de dimension $2n$.

DÉFINITION. La variété TM est appelée *fibré tangent**) à la variété M.

On connaît des applications naturelles : $i : M \to TM$ (*la section nulle*) et $p : TM \to M$ (*la projection*) ; $i(x)$ est le vecteur nul de T_xM tandis que $p(\xi)$ n'est autre que le point x en lequel le vecteur ξ est tangent à M (fig. 251).

EXERCICE 1. Montrer que les applications i et p sont différentiables, que i est un difféomorphisme de M sur $i(M)$ et enfin que $p \circ i : M \to M$ est une application identique.

On appelle *fibres* du fibré TM les contre-images des points $x \in M$ par l'application $p : TM \to M$. Chaque fibre est munie d'une structure d'espace vectoriel. La variété M est appelée *base* du fibré TM.

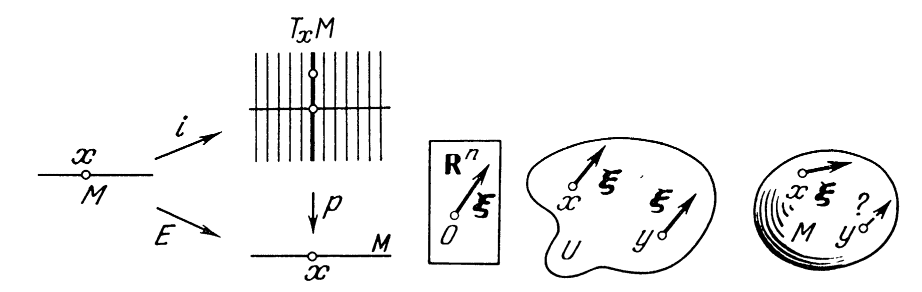


Fig. 251. Fibré tangent

Fig. 252. Variété parallélisable et variété non parallélisable

3. Remarque sur la parallélisabilité. Le fibré tangent à l'espace affine $\mathbf{R}^n$ ou à un domaine $U \subset \mathbf{R}^n$ possède une structure supplémentaire de produit direct : $TU = U \times \mathbf{R}^n$.

En effet, on peut définir un vecteur tangent à U par un couple (x, ξ) où $x \in U$ et ξ est un vecteur de l'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$ pour lequel a été défini un isomorphisme entre T_xU (fig. 252).

Il est équivalent de dire que l'espace affine est *parallélisé*, i.e. l'égalité a été définie pour des vecteurs tangents en des points x et y distincts au domaine U de l'espace $\mathbf{R}^n$.

Le fibré tangent à une variété n'est pas forcément un produit direct, et, d'une façon générale, on ne peut raisonnablement définir l'égalité de vecteurs appliqués en divers points d'une variété M.

La situation se présente ici comme pour le ruban de Möbius (fig. 253) qui est un fibré ayant un cercle pour base et une droite pour fibre, mais qui n'est pas le produit direct d'un cercle par une droite.

---

*) Nous employerons cette dénomination abrégée au lieu de celle, plus pédante, d'*espace du fibré tangent.*

DÉFINITION. On dit qu'une variété M est *parallélisée* si son fibré tangent est muni d'une structure de produit direct, i.e. si est donné un difféomorphisme $TM^n \cong M^n \times \mathbf{R}^n$ transformant linéairement T_xM en $x \times \mathbf{R}^n$. Une variété est *parallélisable* si elle est susceptible d'être parallélisée.

EXEMPLE 1. Tout domaine d'un espace euclidien est parallélisé naturellement.

EXERCICE 1. Montrer que le tore T^n est parallélisable contrairement au ruban de Möbius.

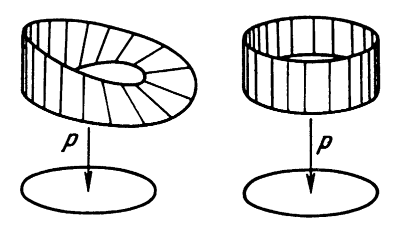


Fig. 253. Un fibré qui n'est pas un produit direct

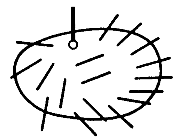


Fig. 254. Théorème du hérisson

THÉORÈME*. *Des sphères S^n seules S^1, S^3 et S^7 sont parallélisables. En particulier, S^2 n'est pas parallélisable* :

$$TS^2 \neq S^2 \times \mathbf{R}^2.$$

(De là il s'ensuit, par exemple, qu'on ne peut peigner un hérisson, car un poil au moins restera perpendiculaire à la surface (fig. 254).)

Le lecteur qui aura résolu l'exercice de la fin du § 33 établira sans peine la non-parallélisabilité de S^2 (nota : $\mathbf{RP}^3 \cong S^2 \times S^1$). La parallélisation du cercle S^1 est évidente. La parallélisation de S^3 est un exercice instructif (nota : S^3 est un groupe, précisément le groupe des quaternions de module 1). La démonstration intégrale du théorème formulé qui nécessite une intrusion assez profonde en topologie est relativement récente.

Les analystes sont enclins à considérer tous les fibrés comme des produits directs et toutes les variétés comme des variétés parallélisables. C'est une erreur à éviter.

4. Application tangente. Soit $f: M \to N$ une application différentiable d'une variété M dans une variété N (fig. 255). Désignons par f_{*x} l'application induite entre les espaces tangents. Définie comme au § 6, cette applica-

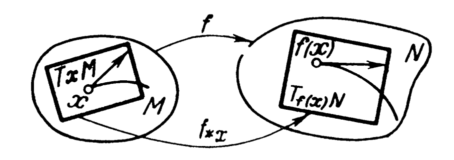


Fig. 255. Dérivée de l'application f au point x

tion est une application linéaire d'un espace vectoriel dans un autre :

$$f_{*x}: \quad T_xM \to T_{f(x)}N.$$

Supposons que x parcoure M. La formule précédente définit l'application

$$f_*: TM \to TN, \quad f_* \mid_{T_xM} = f_{*x}$$

du fibré tangent à M dans le fibré tangent à N. Cette application est différentiable (dire pourquoi) et linéaire (fig. 256) et envoie fibre de TM dans fibre de TN.

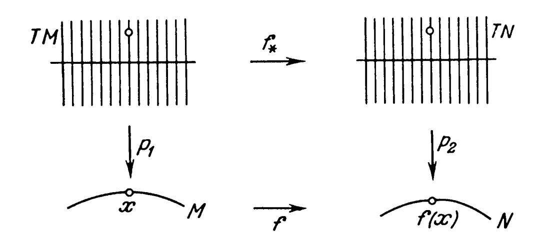
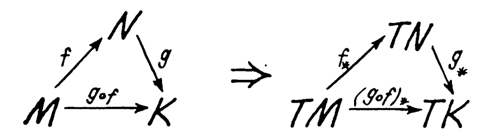


Fig. 256. Application tangente

L'application f_* est appelée ***application tangente à f*** (on emploie également la notation $Tf: TM \to TN$).

Exercice 1. Etant donné des applications différentiables $f: M \to N$, $g: N \to K$ et leur produit $g \circ f: M \to K$, montrer que $(g \circ f)_* = (g_*) \circ (f_*)$ i.e.



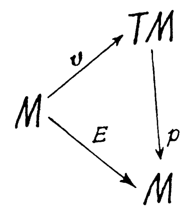
Remarque terminologique. En analyse cette formule est appelée règle de différentiation d'une fonction composée, en algèbre — propriété fonctorielle (covariante) du passage à une application tangente.

5. Champs de vecteurs. Soient M une variété différentiable (de classe C^{r+1}) et TM son fibré tangent (fig. 257).

Définition. *Un champ de vecteurs**) v (de classe C^r) sur M est une application différentiable (de classe C^r) $v: M \to TM$ telle que l'application

*) On dit aussi *section du fibré tangent.*

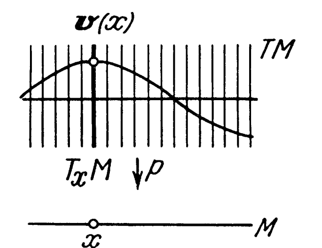
$p \circ v : M \to M$ soit identique et alors le diagramme



et commutatif, i.e. $p(v(x)) = x$.

REMARQUE. Si M est un domaine de l'espace $\mathbf{R}^n$, muni des coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$, la définition précédente coïncide avec celle du § 5.

A noter, toutefois, que la nouvelle définition se passe de tout système de coordonnées.



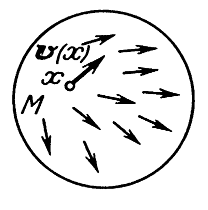


Fig. 257. Champ de vecteurs

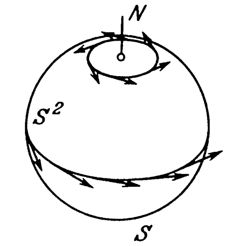


Fig. 258. Champ de vitesses

EXEMPLE. Considérons la famille g^t des rotations d'angle t de la sphère S^2 autour de l'axe SN (fig. 258). Chaque point $x \in S^2$ décrit une courbe (une parallèle) à la vitesse

$$v(x) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} g^t x \in T_x S^2.$$

Nous obtenons l'application $v : S^2 \to TS^2$; il est évident que $pv = E$, i.e. v est un champ de vecteurs sur S^2.

D'une façon générale, si $g^t : M \to M$ est un groupe à un paramètre de difféomorphismes de la variété M, alors exactement comme au § 5 est engendré le champ de vecteurs vitesses sur M.

Toute la théorie locale des équations différentielles ordinaires (non linéaires) se transpose immédiatement aux variétés, car nous avons veillé à temps (au § 5) à ce que les notions fondamentales ne dépendent pas du système de coordonnées.

En particulier, aux variétés se transposent immédiatement le théorème local fondamental de redressement d'un champ de vecteurs et les théorèmes

locaux d'existence, d'unicité, de continuité et de différentiabilité par rapport aux conditions initiales. La transposition n'est par contre pas si immédiate pour les problèmes non locaux dont les plus simples sont le prolongement des solutions et l'existence d'un flot dont est donné le champ de vitesses.

§ 35. Flot défini par un champ de vecteurs

Le théorème dont la démonstration sera donnée ici bas est l'un des plus simples de la théorie qualitative des équations différentielles : il précise en effet les conditions sous lesquelles il y a lieu d'étudier le comportement des solutions d'une équation différentielle sur un intervalle de temps infini.

De ce théorème on déduit, entre autres, la continuité et la différentiabilité d'une solution par rapport aux conditions initiales globalement (i.e. sur un intervalle quelconque de temps fini). Ce théorème sert par ailleurs de méthode de construction des difféomorphismes. On peut, par exemple, l'utiliser pour démontrer que toute variété fermée, sur laquelle existe une fonction différentiable présentant deux points critiques seulement, est homéomorphe à une sphère.

1. Théorème. *Soient M une variété différentiable* (*de classe C^r, $r \geqslant 2$*) (fig. 259) *et $v : M \to TM$ un champ de vecteurs. Supposons que le vecteur $v(x)$ soit distinct du vecteur nul de T_xM uniquement dans une partie compacte K de la variété M. Il existe alors un groupe à un paramètre de difféomorphismes $g^t : M \to M$ admettant le champ v pour champ de vitesses :*



$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g^t x = v(g^t x). \tag{1}$$

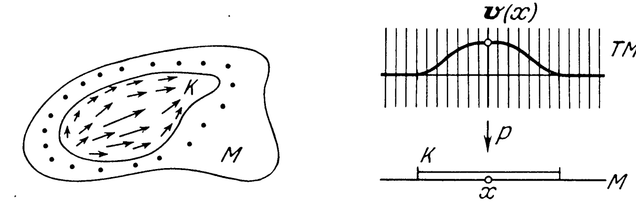


Fig. 259. Champ de vecteurs nul à l'extérieur d'un compact K

Corollaire 1. *Tout champ de vecteurs v sur une variété compacte M est champ de vitesses d'un groupe à un paramètre de difféomorphismes.*

En particulier, sous les hypothèses du théorème ou du corollaire 1, on a le

Corollaire 2. *Toute solution de l'équation différentielle*

$$\dot{x} = v(x), \quad x \in M, \tag{2}$$

peut être prolongée indéfiniment en avant et en arrière. De plus, la valeur de la solution $g^t x$ à l'instant t est différentiable par rapport à t et à la condition initiale x.

REMARQUE. La condition de compacité est indispensable.

EXEMPLE 1. $M = R, \dot{x} = x^2$ (voir § 1, pt. 7) : les solutions ne sont pas indéfiniment prolongeables.

EXEMPLE 2. $M = \{x : 0 < x < 1\}, \dot{x} = 1$.

Démontrons maintenant le théorème.

2. Construction des difféomorphismes g^t pour de petits t. *Pour chaque point $x \in M$ il existe un voisinage ouvert $U \subset M$ et un nombre $\varepsilon > 0$, tels que, pour tout $y \in U$ et tout t ($|t| < \varepsilon$), l'équation* (2) *avec la condition initiale y (pour $t = 0$) admet une solution unique $g^t y$, différentiable par rapport à t et y et satisfaisant à la condition*

$$g^{t+s}y = g^t g^s y, \tag{3}$$

si $|s| < \varepsilon$, $|t| < \varepsilon$, $|s + t| < \varepsilon$.

En effet, le point x est représenté sur une carte, quant à notre assertion au sujet des équations définies sur un domaine d'un espace affine, elle a été démontrée aux chap. 2 et 4*).

Ainsi donc, l'ensemble compact K est recouvert par des voisinages U. Nous pouvons en extraire un recouvrement fini $\{U_i\}$.

Soient ε_i les nombres ε correspondants ; posons $\varepsilon_0 = \min \varepsilon_i > 0$.

Alors pout $|t| < \varepsilon_0$ sont définis *globalement* les difféomorphismes g^t : $M \to M$, $g^{t+s} = g^t g^s$ si $|s|$, $|t|$ et $|s + t| < \varepsilon$ et si $g^t x = x$, $x \notin K$.

En effet, quoique les solutions de l'équation (2) vérifiant la condition initiale x (pour $t = 0$) et définies au moyen de cartes différentes soient à priori distinctes, elles se confondent pour $|t| < \varepsilon_0$ en raison du choix de ε_0 et en vertu du théorème local d'unicité.

Par ailleurs, d'après le théorème local de différentiabilité, le point $g^t x$ est différentiable par rapport à t et à x, or comme $g^t g^{-t} = E$, l'application $g^t : M \to M$ est un difféomorphisme. Remarquons que $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} g^t x = v(x)$.

---

*) La démonstration de l'unicité doit être assortie d'un raisonnement supplémentaire : il faut, en effet, vérifier que l'unicité d'une solution satisfaisant à des conditions initiales données, sur une carte donnée, entraîne l'unicité sur la variété. Sur une variété non séparable l'unicité peut fort bien ne pas avoir lieu (exemple : l'équation $\dot{x} = 1, \dot{y} = 1$ définie sur la variété constituée des droites $\{x\}$ et $\{y\}$ par identification des points d'égales coordonnées négatives). Si, au contraire, la variété M est séparable, la démonstration de l'unicité passe en vertu du § 7, pt. 6. (On se sert de la séparabilité pour démontrer que les solutions $\varphi_1(T)$ et $\varphi_2(T)$ prennent la même valeur au premier point T à partir duquel elles ne se confondent plus.)

3. Construction de g^t quel que soit t. Ecrivons t sous la forme $n\varepsilon_0/2 + r$, où n est entier et $0 \leqslant r < \varepsilon_0/2$. Cette représentation existe et est unique. Les difféomorphismes $g^{\varepsilon_0/2}$ et g^r ont déjà été définis.

Posons $g^t = (g^{\varepsilon_0/2})^n g^r$. C'est un difféomorphisme de M sur M. Lorsque $|t| < \varepsilon_0/2$, la nouvelle définition concorde avec la précédente (voir pt. 2). C'est pourquoi $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} g^t x = v(x)$.

Il est aisé de voir que quels que soient s et t

$$g^{s+t} = g^s g^t. \tag{4}$$

Soit en effet

$$s = m\frac{\varepsilon_0}{2} + p, \quad t = n\frac{\varepsilon_0}{2} + q, \quad s + t = k\frac{\varepsilon_0}{2} + r.$$

Les membres de l'égalité (4) deviennent alors

$$(g^{\varepsilon_0/2})^k g^r \quad \text{et} \quad (g^{\varepsilon_0/2})^m g^p (g^{\varepsilon_0/2})^n g^q.$$

Deux cas peuvent se présenter :

$$1)\ m + n = k, \quad p + q = r; \quad 2)\ m + n = k - 1, \quad p + q = r + \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

A remarquer qu'étant donné que $|p| < \varepsilon_0/2$ et $|q| < \varepsilon_0/2$, les difféomorphismes $g^{\varepsilon_0/2}$, g^p et g^q commutent. D'où l'on tire la formule (4) pour le premier comme pour le deuxième cas $\left(g^{\varepsilon_0/2} g^r = g^p g^q, \text{ car } |p|, |q|, |r| < \varepsilon_0/2,\ p + q = \frac{\varepsilon_0}{2} + r\right)$.

Il ne nous reste plus qu'à vérifier que le point $g^t x$ est différentiable par rapport à t et à x. Ce qui découle immédiatement du fait qut $g^t = (g^{t/N})^N$, et que $g^{t/N}x$ est différentiable par rapport à t et x pour des valeurs suffisamment grandes de N (voir pt. 2).

Donc g^t est un groupe à un paramètre de difféomorphismes de la variété M ; v est le champ correspondant de la vitesse. C.Q.F.D.

4. Remarque. Du théorème démontré il s'ensuit aussitôt que *toute solution de l'équation non autonome*

$$\dot{x} = v(x, t), \quad x \in M, \ t \in \mathbf{R},$$

définie sur une variété compacte M par un champ de vecteurs v dépendant du temps t, est indéfiniment prolongeable.

C'est ce qui explique, entre autres, qu'on peut indéfiniment prolonger les solutions de l'équation linéaire

$$\dot{x} = v(x, t), \quad v(x, t) = A(t)x, \quad t \in \mathbf{R}, \quad x \in \mathbf{R}^n. \tag{5}$$

Considérons en effet $\mathbf{R}^n$ comme la partie affine de l'espace projectif $\mathbf{RP}^n$. L'espace $\mathbf{RP}^n$ est composé de sa partie affine $\mathbf{R}^n$ et d'un plan à l'infini : $\mathbf{RP}^n = \mathbf{R}^n \cup \mathbf{RP}^{n-1}$.

Supposons que v soit un champ de vecteurs linéaire sur $\mathbf{R}^n$ ($v(x) = Ax$). On vérifie sans peine le

LEMME. *Le champ de vecteurs v sur $\mathbf{R}^n$ peut être prolongé (et ce d'une seule manière) en un champ différentiable v' sur $\mathbf{RP}^n$. Le champ v' est tangent à $\mathbf{RP}^{n-1}$ sur le plan à l'infini $\mathbf{RP}^{n-1}$.*

En particulier, prolongeons (pour chaque t) le champ $v(t)$ définissant l'équation (5) en un champ $v'(t)$ sur $\mathbf{RP}^n$. Considérons l'équation

$$\dot{x} = v'(x, t), \quad x \in \mathbf{RP}^n, \quad t \in \mathbf{R}. \tag{6}$$

Un espace projectif étant compact, toute solution de l'équation (6) est indéfiniment prolongeable (fig. 260).

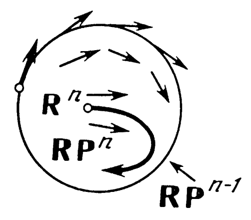


Fig. 260. Prolongement d'un champ de vecteurs linéaire sur le plan projectif

Une solution vérifiant une condition initiale contenue dans $\mathbf{RP}^{n-1}$ ne quitte pas $\mathbf{RP}^{n-1}$, car le champ v' est tangent à $\mathbf{RP}^{n-1}$.

D'après le théorème d'unicité, les solutions des équations à conditions initiales dans $\mathbf{R}^n$ restent dans les limites de $\mathbf{R}^n$ quel que soit t. Or dans $\mathbf{R}^n$ l'équation (6) s'écrit sous la forme (5). Donc toute solution de l'équation (5) est indéfiniment prolongeable.

EXERCICE. Démontrer le lemme précédent.

Solution 1. Soient $(x_1, \ldots, x_n)$ des coordonnées affines sur $\mathbf{RP}^n$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ d'autres coordonnées affines telles que

$$y_1 = x_1^{-1}, \quad y_k = x_k x_1^{-1} \quad (k = 2, \ldots, n).$$

Dans les nouvelles coordonnées l'équation de $\mathbf{RP}^{n-1}$ est $y_1 = 0$.

L'équation différentielle (5)

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = 1, \ldots, n,$$

s'écrit dans les nouvelles coordonnées (fig. 261) :

$$\frac{dy_1}{dt} = -y_1 \left(a_{11} + \sum a_{1k} y_k\right),$$

$$\frac{dy_k}{dt} = a_{k1} + \sum a_{kl} y_l - y_k \left(a_{11} + \sum a_{1l} y_l\right),$$

$$k > 1, \quad l > 1.$$

Sur ces formules qui sont vraies pour $y_1 \neq 0$, on voit comment il faut prolonger le champ à $y_1 = 0$. Lorsque $y_1 = 0$, on a $\frac{dy_1}{dt} = 0$, ce qui démontre le lemme.

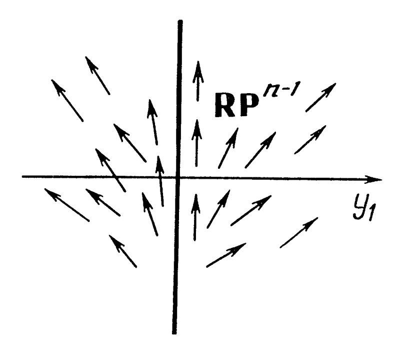


Fig. 261. Comportement du prolongement d'un champ au voisinage d'un plan à l'infini

Solution 2. Une transformation affine peut être considérée comme une transformation projective laissant fixe le plan à l'infini (mais pas ses points). En particulier, les transformations linéaires e^{At} se prolongent en difféomorphismes de l'espace projectif, laissant fixe le plan à l'infini. Ces difféomorphismes forment un groupe à un paramètre dont le champ de vitesses n'est autre que v'.

§ 36. Indices des points singuliers d'un champ de vecteurs

Dans ce paragraphe on se penche sur quelques applications simples de la topologie à la théorie des équations différentielles.

1. Indice d'une courbe. Commençons par des raisonnements suggestifs que nous appuierons plus bas (voir pt. 7) par des définitions précises et des démonstrations.

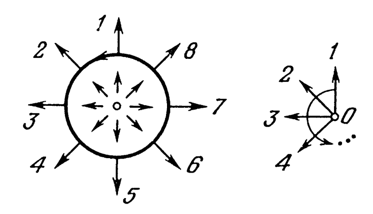


Fig. 262. Courbe d'indice 1

Soit un champ de vecteurs défini sur un plan euclidien orienté. Supposons donnée dans ce plan une courbe fermée, orientée, ne passant pas par les points singuliers du champ (fig. 262). Supposons enfin que cette courbe soit parcourue par le point représentatif dans le sens positif. Lorsque ce

point se déplace, le vecteur du champ qui lui est associé est animé d'un mouvement de rotation continu*). Lorsque, après avoir parcouru toute la courbe, le point revient à sa position de départ, le vecteur en fait de même. Ce dernier peut en outre avoir accompli plusieurs rotations dans un sens ou dans l'autre.

Le nombre de ces rotations est appelé *indice* de la courbe. Cet indice est positif si le vecteur tourne dans le sens de l'orientation du plan (i.e. du premier vecteur unité vers le second) et négatif dans le cas contraire.

EXEMPLE 1. Les indices des courbes α, β, γ, δ représentées sur la fig. 263 sont respectivement égaux à 1, 0, 2 et -1.

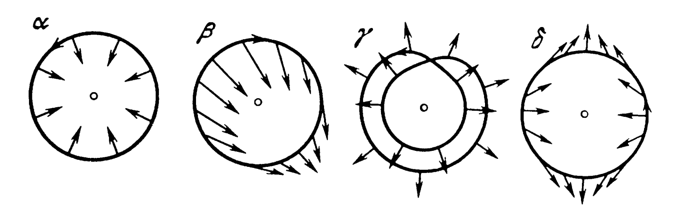


Fig. 263. Courbes d'indices différents

EXEMPLE 2. Supposons que O soit un point non singulier du champ. L'indice de toute courbe située dans un voisinage suffisamment petit du point O est nul.

En effet, la direction du champ est continue au point O, et, dans un voisinage suffisamment petit de ce dernier, elle varie d'une grandeur inférieure, disons, à $\pi/2$.

EXERCICE 1. Soit un champ de vecteurs défini sur le plan $\mathbf{R}^2 = {}^{\mathbf{R}}\mathbf{C}$, privé du point O par la formule $v(z) = z^n$ (n est un entier pas forcément positif). Déterminer l'indice du cercle $z = e^{i\varphi}$ orienté dans le sens des φ croissants (le plan est orienté par le repère 1, i).

Réponse. n.

2. Propriétés de l'indice.

PROPRIÉTÉ 1. *L'indice d'une courbe fermée continûment déformée ne varie pas tant que cette courbe ne passe pas par un point singulier.*

En effet, la direction du vecteur du champ varie continûment dans les points non singuliers. C'est pourquoi le nombre de rotations dépend continûment de la courbe. Etant entier, il est constant.

PROPRIÉTÉ 2. *L'indice d'une courbe ne varie pas par une déformation continue du champ de vecteurs si seulement cette courbe ne contient pas de points singuliers le temps que dure cette déformation.*

---

*) Pour suivre la rotation des vecteurs, il est recommandé de les ramener à l'origine O, en utilisant la parallélisation naturelle du plan.

Ces deux propriétés intuitivement évidentes*) sont le point de départ d'une foule d'intéressants théorèmes.

3. Exemples.

EXEMPLE 1. Soit un champ de vecteurs sur un plan et soit D un disque de cercle S**).

THÉORÈME. *Si l'indice de la courbe S est non nul, l'intérieur du domaine D contient au moins un point singulier.*

Supposons que D ne contienne pas de points singuliers. Il est alors possible de déformer S à l'intérieur de D continûment et sans rencontrer de points singuliers, de manière à obtenir à la fin une courbe aussi proche que l'on veut du point O (on pourrait tout simplement réduire S au point O). L' indice de la courbe obtenue est nul. Or, une déformation ne modifie pas l'indice, donc il était nul au départ.

EXERCICE 1. Montrer que le système d'équations différentielles

$$\dot{x} = x + P(x, y), \quad \dot{y} = y + Q(x, y),$$

où P et Q sont des fonctions bornées sur le plan tout entier, possède au moins une position d'équilibre.

EXEMPLE 2. Démontrons le théorème fondamental de l'algèbre.

Toute équation $z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ possède au moins une racine complexe.

Soit v un champ de vecteurs défini sur le plan de la variable complexe z par la formule $v(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$. Les points singuliers du champ v sont les racines de notre équation.

LEMME. *L'indice d'un cercle de rayon suffisamment grand est égal à n dans le champ construit* (l'orientation est la même que dans l'exercice du pt. 1).

En effet, la formule

$$v_t(z) = z^n + t(a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n), \; 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

définit la déformation continue du champ initial en le champ z^n. Admettons que $r > 1 + |a_1| + \ldots + |a_n|$. Il vient $r^n > |a_1| r^{n-1} + \ldots + |a_n|$.

---

*) Les assertions énoncées impliquent une certaine technique topologique pour être soigneusement formulées et démontrées : homotopie, homologie ou quelque chose dans ce genre (dans la suite nous utiliserons la formule de Green à cet effet). Voir, par exemple, les ouvrages : *Firs concepts of topology* par W. G. Ghinn et N. E. Steenrod. Ramdon House, New-York-Toronto, 1966 ; *Topology from the differentiable viewpoint* par Johm W. Milnor. The University Press of Virginia, Charlottsville, 1965.

**) On pourrait considérer le cas plus général, où D est un domaine plan quelconque limité par une courbe fermée quelconque S.

Par conséquent, le cercle de rayon r ne contient pas de points singuliers durant la déformation. D'après la propriété 2, l'indice de ce cercle est le même dans le champ initial que dans le champ z^n. Or, il est égal à n dans z^n.

Le lemme est donc démontré.

En vertu du théorème précédent, l'intérieur du disque de rayon r contient les points singuliers du champ, c'est-à-dire les racines de notre équation.

Le théorème est démontré.

EXEMPLE 3. Démontrons le théorème suivant du point fixe :

THÉORÈME. *Toute application différentiable**) $f: D \to D$ *d'un disque fermé dans lui-même possède au moins un point fixe.*

Supposons que le plan contenant le disque D soit muni d'une structure d'espace vectoriel et que son origine soit confondue avec le centre du disque (fig. 264). Les points fixes de l'application f sont les points singuliers du champ de vecteurs $v(x) = f(x) - x$.

Supposons que D ne renferme aucun point singulier. Le cercle n'en renferme donc aucun.

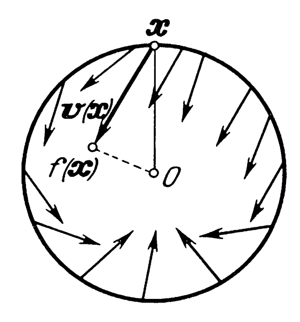


Fig. 264. Application d'un disque sur lui-même

LEMME. *L'indice du cercle du disque D est égal à* 1 *dans le champ v.*

En effet, il existe une déformation continue du champ v en le champ $-x$, telle que durant cette déformation, le cercle ne contient aucun point singulier (il suffit, par exemple, de poser $v_t(x) = tf(x) - x$, $0 \leqslant t \leqslant 1$). C'est pourquoi les indices du cercle sont les mêmes dans les champs $v_0 = -x$ et $v_1 = v$. Or l'indice du cercle $|x| = r$ est égal à 1 dans le champ $-x$.

Le lemme est démontré.

---

*) Ce théorème est valable pour toute application continue. Nous considérerons ici que toutes les applications sont différentiables et démontrerons le théorème (voir point 7) uniquement sous cette hypothèse.

D'après le théorème de l'exemple 1, l'intérieur du disque D contient un point singulier du champ v, i.e. un point fixe de l'application f.

4. Indice d'un point singulier d'un champ de vecteurs. Supposons que O soit un point singulier isolé d'un champ de vecteurs sur le plan, i.e. dans un certain voisinage du point O il n'existe pas d'autres points singuliers. Considérons un cercle de rayon suffisamment petit, centré en O, et supposons que le plan est muni d'une orientation et que le cercle est orienté dans le sens positif (comme au point 1).

THÉORÈME. *L' indice d'un cercle de rayon suffisamment petit, centré en le point singulier isolé O, ne dépend pas du rayon, pourvu que celui-ci soit suffisamment petit.*

En effet, si l'on prend deux quelconques de ces cercles on peut continûment les déformer l'un en l'autre sans passer par des points singuliers.

Observons qu'au lieu d'un cercle on aurait pu prendre une courbe quelconque contournant le point O une seule fois dans le sens positif.

DÉFINITION. On appelle *indice d'un point singulier*, l'indice d'un certain (et par conséquent d'un quelconque) cercle suffisamment petit, orienté dans le sens positif et centré en un point singulier isolé du champ de vecteurs.

EXEMPLE. Les indices des points singuliers du type nœud, col et foyer (ou centre) sont respectivement égaux à $+1$, -1, $+1$ (fig. 265).

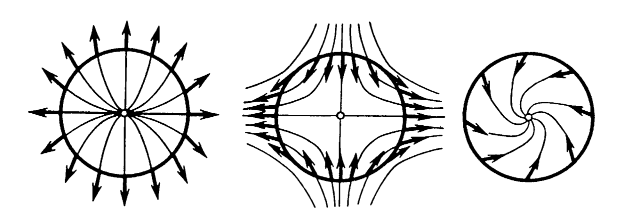


Fig. 265. Les indices des points singuliers simples sont égaux à ± 1

Un point singulier d'un champ de vecteurs est par définition *simple* si l'opérateur de la partie linéaire de ce champ est non dégénéré en ce point. Sur le plan, les points singuliers simples sont les foyers, les cols, les nœuds et les centres. Par conséquent, l'indice d'un point singulier simple est toujours égal à ± 1.

EXERCICE 1. Construire un champ de vecteurs possédant un point singulier d'indice n.

Nota. Voir, par exemple, l'exercice du point 1.

EXERCICE 2. Montrer que l'indice d'un point singulier ne dépend pas du choix de l'orientation du plan.

Nota. Avec l'orientation varient simultanément le sens positif de parcours du cercle et le sens positif dans lequel est compté le nombre de rotations.

5. Théorème de la somme des indices. Soit D un domaine compact limité par une courbe simple S sur un plan orienté. Orientons la courbe S comme on oriente habituellement la frontière de D (i.e. de sorte que D se trouve toujours à gauche par rapport au sens de parcours). Ce qui signifie que le repère constitué par le vecteur de la vitesse de parcours et le vecteur de la normale dirigé vers l'intérieur de D doit définir l'orientation positive du plan.

Supposons que sur le plan soit donné un champ de vecteurs n'ayant pas de points singuliers sur la courbe S, mais en possédant par contre un nombre fini dans D.

THÉORÈME. *L'indice de la courbe S est égal à la somme des indices des points singuliers du champ, situés à l'intérieur du domaine D.*

Observons pour les besoins de la démonstration que l'indice de la courbe est doué de la propriété d'additivité suivante.

Considérons deux courbes orientées γ_1 et γ_2 passant par un même point. On peut constituer une nouvelle courbe orientée $\gamma_1 + \gamma_2$ en parcourant d'abord γ_1 puis γ_2.

LEMME. *L'indice de la courbe $\gamma_1 + \gamma_2$ est égal à la somme des indices des courbes γ_1 et γ_2.*

En effet, le vecteur du champ accomplit n_1 rotations pendant le parcours de la courbe γ_1 et n_2 rotations pendant le parcours de la courbe γ_2, soit $n_1 + n_2$ rotations. Le lemme est démontré.

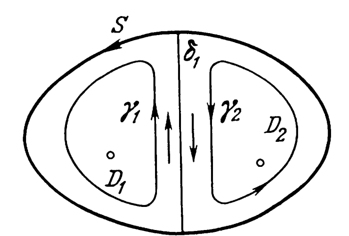


Fig. 266. L'indice de la courbe S est égal à la somme des indices des courbes γ_1 et γ_2

Décomposons maintenant D en parties D_i de telle manière que l'intérieur de chaque partie D_i ne renferme pas plus d'un point singulier du champ (fig. 266) et que chaque frontière de D_i ne contienne pas de point singulier. Orientons les courbes γ_i limitant D_i comme il est d'usage d'orienter une frontière (fig. 266) ; d'après le lemme précédent on a alors

$$\operatorname{ind} \sum_i \gamma_i = \operatorname{ind} S + \sum_j \operatorname{ind} \delta_j,$$

où δ_j est une courbe fermée représentant la partie de la frontière du domaine D_i située à l'intérieur de D et parcourue deux fois dans des sens différents.

L'indice de chaque courbe δ_j est nul, car chacune d'elles se réduit à un point en évitant les points singuliers du champ (voir point 8). L'indice d'une courbe γ_i est égal à celui du point singulier que cette courbe englobe (ou à 0 si le domaine D_i limité par cette courbe ne renferme pas de point singulier). Le théorème est démontré.

EXERCICE 1. Soient $p(z)$ un polynôme de degré n de la variable complexe z et D un domaine du plan de la variable z limité par une courbe S.

Supposons que la courbe S ne contienne aucune racine du polynôme.

Montrer que le nombre de racines du polynôme, situées à l'intérieur de D (on tiendra compte de leurs multiplicités) est égal à l'indice de la courbe S dans le champ $v = p(z)$, i.e. au nombre de rotations de la courbe $p(S)$ autour du point 0.

REMARQUE. Du coup nous avons obtenu une méthode de résolution du problème de Routh-Hurwitz (voir § 23) :

Trouver le nombre n_- de racines du polynôme $p(z)$ donné dans le demi-plan gauche.

Considérons à cet effet un demi-cercle de rayon suffisamment grand, donné dans le demi-plan gauche et centré en $z = 0$. Dans le demi-plan gauche, le nombre de racines est égal à l'indice de la frontière S de ce demi-cercle (si le rayon est suffisamment grand et le polynôme ne possède pas de racines imaginaires pures). On obtient l'indice de la courbe S en comptant le nombre ν de rotations de l'image de l'axe imaginaire, orienté de $-i$ à $+i$, autour de l'origine des coordonnées. En effet, on vérifie sans peine que

$$n_- = \operatorname{ind} S = \nu + \frac{n}{2},$$

puisque l'image d'un demi-cercle de rayon suffisamment grand par la transformation p accomplit environ $n/2$ rotations autour de l'origine des coordonnées (plus le rayon est grand, plus $n/2$ est précis).

En particulier, toutes les racines d'un polynôme de degré n sont situées sur le demi-plan gauche si, et seulement si, le point $p(it)$, lorsque t varie de $-\infty$ à $+\infty$, contourne $n/2$ fois l'origine des coordonnées (dans le sens de 1 à i).

6. Somme des indices des points singuliers sur la sphère.

EXERCICE* 1. Montrer que l'indice d'un point singulier d'un champ de vecteurs sur le plan est préservé par un difféomorphisme.

Ainsi, la notion d'indice est une notion géométrique, indépendante du système de coordonnées. Cette circonstance permet de déterminer l'indice d'un point singulier aussi bien sur toute variété à deux dimensions que sur le plan. En effet, il suffit de trouver l'indice du point singulier sur une carte quelconque ; il sera le même sur d'autres cartes.

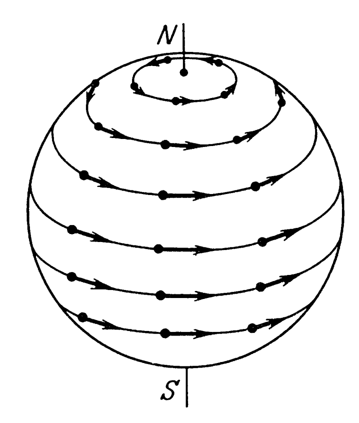
EXEMPLE 1. Soit la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ dans l'espace euclidien à trois dimensions. Le champ de la vitesse de rotation autour de l'axe z ($\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x$, $\dot{z} = 0$) possède deux points singuliers : le pôle nord et le pôle sud (fig. 267). L'indice de chacun de ces points est égal à $+1$.

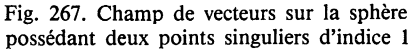
Supposons que sur la sphère est donné un champ de vecteurs ne possédant que des points singuliers isolés. Alors, ils sont en nombre fini, car la sphère est compacte.

THÉORÈME*. *La somme des indices de tous les points singuliers d'un champ sur la sphère ne dépend pas du choix de ce champ.*

De l'exemple précédent il résulte que *cette somme est égale à* 2.

Idée de la démonstration. Considérons une carte couvrant toute la sphère à l'exception d'un seul point que nous appellerons pôle. Soit $\boldsymbol{e}_1$ le champ de vecteurs coordonnées sur le plan euclidien de cette carte. Transportons ce champ sur la sphère. Nous obtenons ainsi sur la sphère un champ (non défini seulement au pôle) que nous désignerons comme précédemment par $\boldsymbol{e}_1$.




Fig. 267. Champ de vecteurs sur la sphère possédant deux points singuliers d'indice 1

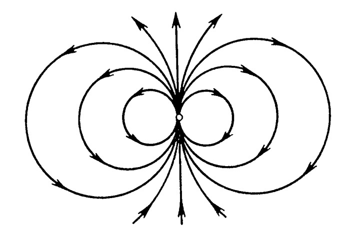


Fig. 268. Champ de vecteurs $\boldsymbol{e}_1$ parallèle sur une carte de la sphère, mais représenté sur une autre

Considérons maintenant la carte d'un voisinage du pôle. Sur le plan de cette carte nous pouvons représenter le champ de vecteurs $\boldsymbol{e}_1$, qui ne sera pas défini au seul point O (voir fig. 268).

LEMME. *L'indice d'une courbe fermée contournant une fois le point O dans le champ construit sur le plan est égal à* 2.

Pour démontrer ce lemme il suffit de réaliser les opérations décrites ci-dessus en se servant de deux cartes, par exemple, deux cartes de la sphère en projection stéréographique (fig. 235). Les droites parallèles de la première se transformeront en cercles sur la seconde (fig. 268). Il est clair que l'indice est égal à 2.

Considérons à présent un champ de vecteurs $\boldsymbol{v}$ sur la sphère. Prenons pour pôle un point non singulier de ce champ. Tous les points singuliers

seront alors représentés sur la carte du complémentaire du pôle. La somme des indices de tous les points singuliers du champ est égale à l'indice d'un cercle de rayon suffisamment grand, contenu dans le plan de cette carte (en vertu du théorème du point 5). Transportons ce cercle sur la sphère, puis de la sphère sur la carte d'un voisinage du pôle. Sur cette carte l'indice du cercle obtenu est nul dans le champ considéré, car ce pôle est un point non singulier du champ. Sur cette nouvelle carte nous pouvons interpréter l'indice du cercle de la première carte comme « le nombre de rotations du champ $\boldsymbol{v}$ *relativement au champ* $\boldsymbol{e}_1$ » pendant le parcours du cercle.

Ce nombre est égal à $+2$, car sur la nouvelle carte, lorsque une rotation est accomplie autour du point O dans le sens positif relativement à la première carte, le champ $\boldsymbol{e}_1$ représenté sur la nouvelle carte fait 2 rotations, alors que le champ $\boldsymbol{v}$ n'en fait aucune.

EXERCICE* 2. Soit $f: S^2 \to \boldsymbol{R}^1$ une fonction différentiable sur une sphère dont tous les points critiques sont simples (i.e. la seconde différentielle est non nulle en chaque point critique). Montrer que

$$m_0 - m_1 + m_2 = 2,$$

où m_i est le nombre de points critiques dont est égal à i l'indice négatif d'inertie de la seconde différentielle.

En d'autres termes, *si de la somme des minima on retranche le nombre de cols et qu'on lui ajoute le nombre de maxima, on obtient toujours 2 pour résultat.*

Dans le même ordre d'idées, le nombre de tous les sommets montagneux du globe, additionné au nombre de tous les cirques est de 2 supérieur à celui des cols. Si l'on se restreint à une île ou à un continent, i.e. si l'on considère que la fonction est définie sur un disque dont le cercle ne renferme pas de points critiques, alors $m_0 - m_1 + m_2 = 1$ (fig. 269).

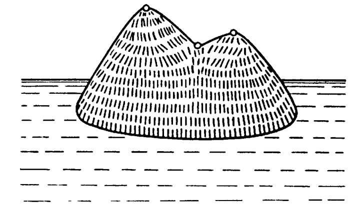


Fig. 269. Sur une île, le nombre de sommets et de cirques est de 1 supérieur à celui des cols

Nota. Etudier le gradient de la fonction f.

EXERCICE* 3. Démontrer le théorème d'Euler sur les polyèdres :

Pour tout polyèdre convexe limité de α_0 *sommets,* α_1 *arêtes et* α_2 *faces, on a la relation*

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2.$$

Nota. Cet exercice peut être ramené au précédent.

EXERCICE* 4. Montrer que *la somme des indices* χ *des points singuliers d'un champ de vecteurs sur toute variété compacte à deux dimensions ne dépend pas de la donnée de ce champ.*

Le nombre χ obtenu est appelé *caractéristique d'Euler de la variété.* Nous avons vu ci-dessus que la caractéristique d'Euler pour une sphère était égale à 2 : $\chi(S^2) = 2$.

EXERCICE 5. Déterminer la caractéristique d'Euler du tore et d'une sphère à n anses (fig. 245).

Réponse : 0, -2, $2-2n$.

EXERCICE* 6. Généraliser les résultats des exercices 2 et 3 obtenus sur la sphère à toute variété compacte à deux dimensions M :

$$m_0 - m_1 + m_2 = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = \chi(M).$$

7. Argumentation. Donnons maintenant une définition exacte du *nombre de rotations* d'un champ de vecteurs.

Soit v un champ de vecteurs différentiable, défini par ses composantes $v_1(x_1, x_2)$ et $v_2(x_1, x_2)$ sur le domaine U d'un plan rapporté aux coordonnées (x_1, x_2). Le système de coordonnées (x_1, x_2) oriente et munit le plan d'une structure euclidienne.

Soit U' le domaine obtenu en privant U des points singuliers du champ et soit $f: U' \to S^1$ une application du domaine U' sur un cercle S^1, définie par la formule

$$f(x) = \frac{v(x)}{|v(x)|}.$$

Cette application est différentiable (puisque nous avons exclu les points singuliers du champ). Soit un point quelconque x du domaine U'. Introduisons une coordonnée angulaire φ sur le cercle S^1 au voisinage de l'image $f(x)$ du point x. Nous obtenons ainsi au voisinage du point x la fonction réelle différentiable $\varphi(x_1, x_2)$.

Pour $v_1 \neq 0$ la différentielle totale de cette fonction est

$$d\varphi = d \operatorname{Arc\,tg} \frac{v_2}{v_1} = \frac{v_2 dv_1 - v_1 dv_2}{v_1^2 + v_2^2}. \tag{1}$$

Le premier membre est égal au second même lorsque $v_1 = 0$ et $v_2 \neq 0$. Ainsi, quoique la fonction φ ait été définie localement et à un multiple de 2π près seulement, sa différentielle est une forme différentiable bien définie sur le domaine U' tout entier. Désignons cette forme par $d\varphi$.

DÉFINITION. On appelle *indice d'une courbe fermée orientée* $\gamma: S^1 \to U'$ l'intégrale de la forme (1) prise le long de la courbe γ et divisée par 2π :

$$\operatorname{ind} \gamma = \frac{1}{2\pi} \oint_\gamma d\varphi. \tag{2}$$

Ceci posé, nous allons démontrer les théorèmes énoncés plus haut, et notamment celui de la somme des indices (voir point 5).

Démonstration. Soit D un domaine limité par une courbe S. Supposons que le champ de vecteurs v possède un nombre fini de points singu-

liers, tous situés à l'intérieur de D. Soit D' le domaine obtenu en excluant du domaine D les points singuliers et les petits voisinages centrés en ces points. Compte tenu de l'orientation, la frontière de D' est

$$\partial D' = S - \sum_i S_i,$$

où S_i représente le cercle contournant le i-ème point singulier dans le sens positif (fig. 270). Appliquons la formule de Green au domaine D' et à l'intégrale (2) ; il vient

$$\iint_{D'} 0 = \oint_S d\varphi - \sum_i \oint_{S_i} d\varphi.$$

Le premier membre est nul, puisque localement la forme (1) est une différentielle totale. En vertu de la définition (2) on a $\operatorname{ind} S = \sum \operatorname{ind} S_i$. C.Q.F.D.

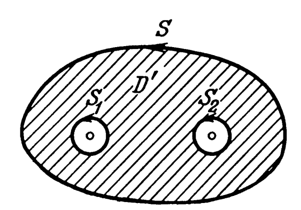


Fig. 270. Domaine auquel s'applique la formule de Green

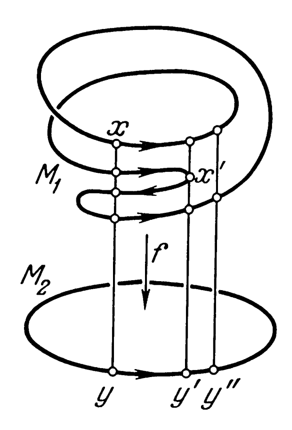


Fig. 271. Application de degré 2

EXERCICE* 1. Montrer que l'indice d'une courbe fermée est un entier.

EXERCICE* 2. Procéder à la démonstration intégrale des assertions des points 1, 2, 3 et 4.

8. Cas multidimensionnel. On appelle degré d'une application la généralisation au cas multidimensionnel de la notion de *nombre de rotations.*

Le degré d'une application est le nombre de contre-images d'un point, affectée chacune du signe défini par l'orientation. Sur la figure 271, le degré de l'application de la courbe orientée M_1 sur la courbe orientée M_2 est égal à 2, étant donné que le nombre de contre-images du point y est : $1 + 1 - 1 + 1 = 2$.

Donnons une définition générale en procédant de la manière suivante. Soit $f: M_1^n \to M_2^n$ une application différentiable d'une variété orientée de dimension n sur une autre variété de la même nature. Un point $x \in M_1^n$ de la variété source est appelé *point régulier* si la dérivée de l'application f au point x est un opérateur linéaire non dégénéré $f_{*x} : T_xM_1^n \to T_{f(x)}M_2^n$.

Sur la figure 271, par exemple, le point x est régulier, contrairement au point x'.

DÉFINITION. On appelle *degré de l'application f au point régulier x* le nombre $\deg_x f$, égal à $+1$ ou -1 selon que f_{*x} conserve ou non l'orientation lorsqu'elle envoie $T_xM_1^n$ sur $T_{f(x)}M_2^n$.

EXERCICE 1. Montrer que le degré d'un automorphisme linéaire $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ est le même en tous les points et est égal à

$$\deg_x A = \operatorname{sgn} \det A = (-1)^{m_-},$$

où m_- est le nombre de valeurs propres de l'opérateur A à partie réelle <0.

EXERCICE 2. Soit $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ un automorphisme linéaire sur un espace euclidien. Définissons une application de la sphère unité sur elle-même par la formule $f(x) = A(x)/|Ax|$. Trouver le degré de l'application f au point x.

Réponse. $\deg_x f = \deg A$.

EXERCICE 3. Soit $f: S^{n-1} \to S^{n-1}$ une application transformant chaque point de la sphère S^{n-1} en le point diamétralement opposé. Quel est le degré de cette application au point x ?

Réponse. $\deg_x f = (-1)^n$.

EXERCICE 4. Soit $A : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ un automorphisme $\mathbf{C}$-linéaire. Trouver le degré de son réélifié ${}^{\mathbf{R}}A$.

Réponse. $+1$.

Considérons maintenant un point quelconque y de la variété d'arrivée M_2^n. Le point $y \in M_2^n$ est appelé *valeur régulière de l'application f* si toutes les contre-images $f^{-1}y$ sont régulières.

Sur la figure 271, par exemple, le point y est une valeur régulière, contrairement au point y'.

Supposons de plus que les variétés M_1^n et M_2^n sont compactes et connexes. On a alors le

THÉORÈME.

1. *Il existe des valeurs régulières.*

2. *Le nombre de contre-images de chaque valeur régulière est fini.*

3. *La somme des degrés d'une application en toutes les contre-images d'une valeur régulière ne dépend pas du choix de cette valeur.*

La démonstration de ce théorème qui est assez compliquée ne sera pas donnée ici ; on la trouvera dans des manuels de topologie*).

---

*) Voir, par exemple. *Topology from the differentiable viewpoint* par John W. Milnor. The University Press of Virginia, Charlotesville, 1965.

REMARQUE 1. En fait, tous les points presque de la variété M_2^n sont des valeurs régulières ; les valeurs non régulières forment un ensemble de mesure 0.

REMARQUE 2. La condition de compacité est essentielle non seulement pour la seconde, mais également pour la troisième assertion du théorème. (On pourra considérer, par exemple, l'injection du demi-axe négatif dans l'axe numérique tout entier.)

REMARQUE 3. Le nombre des contre-images (sans tenir compte de leurs signes) peut être différent pour des valeurs régulières différentes (sur la figure 271, par exemple, la valeur y possède 4 contre-images pour 2 à y'').

DÉFINITION. On appelle *degré d'une application f* la somme de ses degrés en tous les points contre-images d'une valeur régulière :

$$\deg f = \sum_{x \in f^{-1}y} \deg_x f.$$

EXERCICE 5. Trouver le degré de l'application du cercle $|z| = 1$ sur lui-même, définie par la formule $f(z) = z^n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Réponse. n.

EXERCICE 6. Trouver le degré de l'application de la sphère unité de l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$ sur elle-même, définie par la formule $f(z) = Az/|Az|$ où $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ est un opérateur linéaire non dégénéré.

Réponse. $\deg f = \operatorname{sgn} \det A$.

EXERCICE 7. Trouver le degré de l'application de la droite complexe projective $\mathbf{CP}^1$ sur elle-même, définie par la formule

$$\text{a) } f(z) = z^n \text{ ; b) } f(z) = \overline{z^n}.$$

Réponse. a) (n) ; b) $-(n)$.

EXERCICE 8. Trouver le degré de l'application de la droite complexe projective $\mathbf{CP}^1$ sur elle-même, définie par un polynôme de degré n.

Réponse. n.

EXERCICE* 9. Montrer que l'indice de la courbe fermée $\gamma : S^1 \to U'$, défini au point 7, est égal au degré de l'application h d'un cercle sur un cercle, définie de la manière suivante.

Soit $f : U' \to S^1$ l'application construite au point 7 à l'aide du champ de vecteurs v sur le domaine U'. Posons $h = f \circ \gamma : S^1 \to S^1$. Alors

$$\operatorname{ind} \gamma = \deg h.$$

DÉFINITION. On appelle *indice d'un point singulier isolé* 0 d'un champ de vecteurs v, défini sur un domaine contenant le point 0 de l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$, le degré de l'application h d'une sphère de rayon petit r, centrée en 0, sur elle-même. L'application

$$h : S^{n-1} \to S^{n-1}, \quad S^{n-1} = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| = r\}$$

est donnée par la formule

$$h(x) = \frac{rv(x)}{|v(x)|}.$$

EXERCICE 10. Supposons que l'opérateur v_{*0} de la partie linéaire du champ v soit non dégénéré au point 0. Montrer que l'indice du point singulier 0 est égal au degré de cet opérateur.

EXERCICE 11. Trouver l'indice du point singulier 0 du champ correspondant sur $\mathbf{R}^n$ à l'équation $\dot{x} = -x$.

Réponse. $(-1)^n$.

La notion de degré permet de généraliser au cas multidimensionnel les théorèmes démontrés plus haut pour le cas bidimensionnel. On trouvera les démonstrations dans les manuels de topologie.

En particulier, *la somme des indices des points singuliers d'un champ de vecteurs sur une variété compacte de dimension arbitraire dépend des propriétés de cette variété et non du choix du champ.*

Le nombre obtenu s'appelle *caractéristique d'Euler* de la variété.

Pour déterminer la caractéristique d'Euler d'une variété, il suffit d'étudier les points singuliers d'une quelconque équation différentielle donnée sur cette variété.

EXERCICE 12. Trouver la caractéristique d'Euler de la sphère S^n, de l'espace projectif $\mathbf{RP}^n$ et du tore T^n.

Réponse. $\chi(S^n) = 2\chi(\mathbf{RP}^n) = 1 + (-1)^n$, $\chi(T^n) = 0$.

Solution. Sur un tore de dimension quelconque il existe une équation différentielle sans points singuliers (voir, par exemple, le § 24, point 5), donc $\chi(T^n) = 0$.

Il est clair que $\chi(S^n) = 2\chi(\mathbf{RP}^n)$. Soit en effet l'application $p : S^n \to \mathbf{RP}^n$ qui associe à chaque point de la sphère $S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$ la droite joignant ce point à l'origine des coordonnées. L'application p est un difféomorphisme local ; en outre chaque point de l'espace projectif est l'image de deux points diamétralement opposés de la sphère. Par conséquent, tout champ de vecteurs sur $\mathbf{RP}^n$ définit sur S^n un champ possédant deux fois plus de points singuliers, et de plus les indices de deux points diamétralement opposés sur la sphère seront égaux à l'indice du point correspondant dans l'espace projectif.

Pour déterminer $\chi(S^n)$, donnons-nous sur l'espace euclidien $\mathbf{R}^{n+1}$ la sphère $x_0^2 + \ldots + x_n^2 = 1$ et soit la fonction $x_0 : S^n \to \mathbf{R}$.

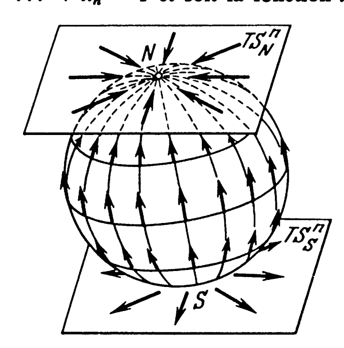


Fig. 272. Linéarisation d'une équation différentielle sur une sphère au voisinage de ses points singuliers

Considérons sur la sphère l'équation différentielle

$$\dot{x} = \operatorname{grad} x_0$$

et examinons ses points singuliers (fig. 272). Le champ de vecteurs grad x_0 s'annule en deux points : au pôle nord $N(x_0 = 1)$ et au pôle sud $S(x_0 = -1)$.

La linéarisation de l'équation différentielle au voisinage des pôles donne respectivement

$$\dot{\xi} = -\xi, \quad \xi \in \mathbf{R}^n = TS^n_N;$$
$$\dot{\eta} = \eta, \quad \eta \in \mathbf{R}^n = TS^n_S.$$

Par conséquent, l'indice du pôle nord est égal à $(-1)^n$ et celui du pôle sud $(+1)^n$, soit au total

$$\chi(S^n) = 1 + (-1)^n.$$

D'où il résulte en particulier que *tout champ de vecteurs sur une sphère S^n, où n est pair, possède au moins un point singulier.*

EXERCICE 13. Construire un champ de vecteurs sans points singuliers sur la sphère de dimension impaire S^{2n-1}.

Nota. Etudier l'équation différentielle du deuxième ordre $\ddot{x} = -x$, $x \in \mathbf{R}^n$.

PROGRAMME D'EXAMEN

1. Le théorème de redressement d'un champ de vecteurs (§ 6 ; § 7, pt. 1, 7) et sa démonstration (§ 32, pt. 5).

2. Théorèmes d'existence, d'unicité et de différentiabilité (§ 7, pt. 2 à 5 et § 31, pt. 1 à 8 ; § 32, pt. 1 à 4). Applications contractantes (§ 30).

3. Le théorème de prolongement (§ 7, pt. 6) et le théorème en vertu duquel un champ de vecteurs définit un flot sur une variété compacte (§ 35, pt. 1 à 3).

4. Orbites d'un système autonome. Théorème des orbites fermées (§ 9).

5. Dérivée suivant un champ de vecteurs et intégrales premières (§§ 10, 12).

6. L' exponentielle d'un opérateur linéaire. L' exponentielle d'un nombre complexe et d'un bloc de Jordan (§ 14 ; § 15, pt. 4, 5 ; § 25, pt. 1).

7. Théorèmes sur les liens entre les flots des équations linéaires, les groupes à un paramètre de transformations linéaires et les exponentielles (§ 4, pt. 2 à 4 ; § 13, pt. 1 à 3 ; § 15, pt. 1 à 3).

8. Relation entre le déterminant, l'exponentielle et la trace. Théorème de Liouville sur le wronskien (§ 16 ; § 18, pt. 4 ; § 27, pt. 6).

9. Classification des points singuliers des systèmes linéaires sur le plan (§ 2, pt. 4, 5 ; § 17, pt. 2 ; § 19, pt. 4 ; § 20, pt. 3 à 5).

10. Résolution des systèmes autonomes linéaires et homogènes dans un domaine réel et dans un domaine complexe, dans le cas où les racines de l'équation caractéristique sont simples (§ 17, pt. 1 ; § 18, pt. 5 ; § 19 ; § 20).

11. Résolution des systèmes et équations autonomes linéaires et homogènes dans le cas où les racines de l'équation caractéristique sont multiples (§ 25).

12. Résolution des équations autonomes linéaires et non homogènes dont le deuxième membre est une somme de quasi-polynômes (§ 26).

13. Equations et systèmes non autonomes linéaires et homogènes. Wronskien. Cas de coefficients périodiques (§ 27 et § 28, pt. 1).

14. Résolution des équations linéaires et non homogènes par la méthode de variation des constantes (§ 29).

15. Théorème de stabilité en approximation linéaire (§ 22, pt. 3 à 5 ; § 23).

16. Orbites d'une équation linéaire dont les racines de l'équation caractéristique sont imaginaires pures. Petites oscillations des systèmes conservatifs (§ 24 et § 25, pt. 6).

EXERCICES D'EXAMEN*)

1. Pour amarrer un navire, on jette un cordage qui est enroulé sur une bitte. On demande de calculer la force qui freinera ce navire si le cordage accomplit 3 tours de bitte (le coefficient de frottement du cordage sur la bitte est égal à 1/3 et l'ouvrier tire l'extrémité libre du cordage avec une force de 10 kgf).

2. Représenter sur la surface d'un cylindre des phases les orbites d'un pendule soumis à l'action d'un moment de torsion constant :

$$\ddot{x} = 1 + 2 \sin x.$$

A quels mouvements du pendule correspondent les diverses orbites ?

3. Calculer la matrice E^{At}, où A est une matrice donnée d'ordre deux ou trois.

4. Représenter l'image du carré $|x_i| \leqslant 1$ par la transformation du flot du système

$$\dot{x}_1 = 2x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 + x_2$$

pendant le temps $t = 1$.

5. Combien faut-il de chiffres pour représenter le 100-ième terme de la suite 1, 1, 6, 12, 29, 59, ... ($x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2} + n$, $x_1 = x_2 = 1$) ?

6. Représenter l'orbite du système

$$\dot{x} = x - y - z, \quad \dot{y} = x + y, \quad \dot{z} = 3x + z,$$

qui passe par le point (1, 0, 0).

7. Trouver les valeurs de α, β, γ pour lesquelles les fonctions $\sin \alpha t$, $\sin \beta t$, $\sin \gamma t$ sont linéairement dépendantes.

8. Représenter sur le plan (x_1, x_2) la trajectoire d'un point soumis aux petites oscillations

$$\ddot{x}_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad U = \frac{1}{2}(5x_1^2 - 8x_1x_2 + 5x_2^2).$$

Les conditions initiales sont

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 0, \quad \dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0.$$

9. Un pendule simple long de 1 m, d'un poids de 1 kgf, initialement au repos, est soumis pendant une seconde à l'action d'une force horizontale de 100 gf. Trouver l'amplitude (en cm) des oscillations établies lorsque la force cessera d'agir.

10. Etudier la stabilité au sens de Liapounov de la solution triviale du système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\omega^2 x_1, \end{cases} \qquad \omega(t) = \begin{cases} 0{,}4 & \text{pour} \quad 2k\pi \leqslant t < (2k+1)\pi, \\ 0{,}6 & \text{pour} \quad (2k-1)\pi \leqslant t < 2k\pi, \end{cases}$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

11. Trouver les points singuliers du système

$$\dot{x} = xy + 12, \quad \dot{y} = x^2 + y^2 - 25.$$

---

*) Une erreur de 10 à 20% est admise dans les calculs.

Etudier la stabilité, déterminer le type des points singuliers et représenter les orbites.

12. Trouver sur le tore $\{(x, y) \bmod 2\pi\}$ les points singuliers du système

$$\dot{x} = -\sin y, \quad \dot{y} = \sin x + \sin y.$$

Etudier la stabilité, déterminer le type des points singuliers et représenter les orbites.

13. On sait expérimentalement que lorsque un rayon lumineux franchit la surface de séparation de deux milieux d'indices de réfraction respectivement égaux à n_1 et n_2, le sinus de l'angle d'incidence α_1 et le sinus de l'angle de réfraction α_2 sont inversement proportionnels aux indices de réfraction n_1 et n_2, i.e.

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Trouver la forme des rayons lumineux se propageant dans un plan (x, y) d'indice de réfraction $n = n(y)$. Etudier le cas où $n(y) = \frac{1}{y}$ (le demi-plan $y > 0$ possédant cet indice de réfraction s'appelle modèle de Poincaré du plan de Lobatchevski).

14. Représenter les rayons issus dans des directions différentes de l'origine du plan d'indice de réfraction $y^4 - y^2 + 1$.

La résolution de cet exercice explique entre autres le phénomène du mirage. L' indice de réfraction de l'air prend sa valeur maximale à une certaine hauteur, puisque dans les plus hautes et les plus basses couches (ces dernières étant les plus chaudes) l'air est plus raréfié et que cet indice de réfraction est inversement proportionnel à la vitesse. Les oscillations du rayon au voisinage de la couche de plus grand indice de réfraction sont précisément perçues comme le mirage.

Un autre phénomène s'expliquant avec les mêmes oscillations du rayon est le canal sonore suivant lequel le son se propage à des centaines de kilomètres dans l'océan. La cause en est le jeu de la température et de la pression, jeu qui engendre une couche de plus grand indice de réfraction (i.e. une vitesse minimale du son) à une profondeur de 500 à 1 000 m. Ce phénomène peut servir à signaler l'approche des tsunami.

15. Représenter les géodésiques du tore en utilisant le théorème de Clairaut, en vertu duquel le produit de la distance à l'axe de rotation par le sinus de l'angle formé par une géodésique avec le méridien est constant le long de chaque géodésique de la surface de révolution.

16. Redresser les courbes de phase de l'équation $\ddot{x} = x - x^2$ au voisinage du point $x = 0$, $\dot{x} = 1$.

17. Redresser les courbes intégrales de l'équation $\dot{x} = x + \cos t$.

18. Redresser le champ de directions de l'équation $\dot{x} = x + te^t$.

19. Redresser le champ de vitesses de phase de l'équation $\dot{x} = x$ au voisinage du point $x = 0$.

20. Dans quelles coordonnées l'équation

$$dy/dx = x^2 + y^{2/3}$$

est-elle à variables séparables ?

21. Intégrer l'équation $\dot{x} = x + \delta(t - 2)$.

22. Trouver la dérivée, par rapport à A pour $A = 0$, de la solution de l'équation $\ddot{x} = x^2 + Ax^3$, qui vérifie la condition initiale $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$.

23. Trouver les valeurs et les vecteurs propres de l'opérateur de monodromie d'une solution 2π-périodique de l'équation $\ddot{x} - x = \sin t$.

24. Intégrer l'équation $\dot{x} = Atx + x$, où $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ est un opérateur linéaire.

25. Les opérateurs A et B peuvent-ils être non commutables si

$$e^A = e^B = e^{A+B} = E\ ?$$

26. Trouver toutes les intégrales premières du système $\dot{x} = y$, $\dot{y} = x + y$, qui ne dépendent pas du temps et sont continues sur le plan de phase tout entier.

27. Les nombres 1 et i sont des valeurs propres d'un opérateur $A : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$. On demande si l'équation $\dot{x} = Ax$ possède des intégrales premières non constantes continues dans $\mathbf{R}^3$.

28. Les nombres 1 et -1 étant des valeurs propres d'un opérateur $A : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, on demande si l'équation $\dot{x} = Ax$ possède des intégrales premières non constantes continues dans $\mathbf{R}^3$.

29. Résoudre le problème de Cauchy

$$xu_x + u_y = 0, \quad u|_{y=0} = \sin x.$$

30. L'équation $x^{(n)} = F(t, x, \ldots, x^{(n-1)})$ admet t et $\sin t$ pour solutions. Déterminer n.

31. Les solutions de l'équation $x = x^3 \sin x$ sont-elles prolongeables à l'axe t tout entier ?

32. Les solutions de l'équation de Newton $\ddot{x} = -\mathbf{grad}\, U$, $U = x_1^4 + x_1x_2 + x_2^6$, sont-elles indéfiniment prolongeables ?

33. Même question pour les solutions de l'équation

$$\ddot{x} = 1 + 2 \sin x.$$

34. Une position d'équilibre de l'équation de Newton peut-elle être stable au sens de Liapounov sans être un point de minimum local de l'énergie potentielle ?

35. Une solution périodique d'un système autonome, représentée sur le plan de phase par un cycle limite peut-elle être asymptotiquement stable ?

36. Une solution périodique d'un système autonome peut-elle être instable au sens de Liapounov si elle est représentée sur le plan de phase par un cycle limite autour duquel viennent s'enrouler de l'intérieur et de l'extérieur les orbites tendant en spirale vers ce cycle lorsque le point courant se déplace dans le sens des t croissants ?

37. Une position d'équilibre instable au sens de Liapounov peut-elle être rendue 1) stable, 2) asymptotiquement stable par une linéarisation ?

38. Une position d'équilibre asymptotiquement stable au sens de Liapounov peut-elle devenir instable par une linéarisation ?

Exercices supplémentaires

1. L'équation aux variations pour l'équation $\ddot{x} = -\sin x$ le long de la solution vérifiant la condition initiale $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 2$ possède-t-elle des solutions non triviales bornées sur l'axe t tout entier ?

2. Même question pour la solution vérifiant la condition initiale $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 1$.

3. Résoudre l'équation aux variations de l'exercice 1.

4. Trouver les valeurs et les vecteurs propres de l'opérateur de monodromie pour l'équation aux variations de l'exercice 2.

5. Calculer la dérivée, par rapport à ε pour $\varepsilon = 0$, de la solution 2π-périodique de l'équation $\ddot{x} + \sin x = \varepsilon \cos t$ qui devient identiquement égale à π pour $\varepsilon = 0$.

6. Trouver la plus grande valeur de t pour laquelle la solution du problème de Cauchy

$$u_t + uu_x = -\sin x, \quad u|_{t=0} = 0$$

se prolonge à $[0, t[$.

7. Trouver tous les sous-espaces de dimension finie de l'espace des fonctions indéfiniment différentiables, invariants par toutes les translations de la droite.

8. Supposons qu'une fonction x présente un zéro double en 0. Montrer que l'équation $\dot{x} = v(x)$ se ramène par un difféomorphisme d'un voisinage de 0 à la forme $\dot{y} = y^2 + Cy^3$ (la constante C est définie par le champ).

9. Montrer que les zéros d'une combinaison linéaire des n premières fonctions propres du problème de Sturm-Liouville

$$u_{xx} + q(x)u = \lambda u, \quad u(0) = u(l) = 0, \quad q > 0,$$

partagent l'intervalle $[0, l]$ en n parties au plus.

Nota (I. Guelfand). Passer aux fermions, i.e. aux solutions antisymétriques de l'équation $\sum u_{x_i x_i} + \sum q(x_i)u = \lambda u$, et se servir du fait que sa première fonction propre ne possède pas de zéros à l'intérieur du simplexe fondamental $0 < x_1 < \ldots < x_n < l$.

10. (N. Baoutine). Montrer que le système généralisé de Lotka-Volterra

$$\dot{x} = x(a + kx + ly), \quad \dot{y} = y(b + mx + ny)$$

ne possède pas de cycle limite : ses orbites fermées non ponctuelles, si elles existent, recouvrent totalement des domaines annulaires.

11. Considérons le mouvement circulaire de la matière sous l'action d'un transport par le champ de vitesses et d'une petite diffusion. Montrer que si le champ de vitesses admet des points stationnaires et génériques, presque toute la masse se rassemblera à la fin au voisinage d'un point attractif.

[L'équation d'évolution de la densité est $\dot{u} = \varepsilon u_{xx} - (uv)_x$, où $v\partial/\partial x$ est le champ de vitesses. Le champ est potentiel sur la droite de revêtement du cercle $v = -U_x$. Si le champ de vitesses est potentiel, i.e. si la fonction U est périodique, la solution stationnaire est donnée par la distribution de Gibbs

$$u(x) = Ce^{-U(x)/\varepsilon}.$$

Pour ε petit, cette distribution est concentrée au voisinage du minimum du potentiel.

Si la fonction U tend vers $-\infty$ à $-\infty$, la solution stationnaire est de la forme

$$u(x) = C \int_{-\infty}^{x} e^{[U(\xi) - U(x)]/\varepsilon} d\xi.$$

La solution stationnaire est concentrée au voisinage d'un minimum local du potentiel, défini par la condition suivante : l'écart entre la valeur maximale prise par le potentiel à gauche de ce point de minimum local et la valeur prise par le potentiel en ce point de minimum est supérieur aux écarts similaires calculés pour les autres points de minimums locaux.]

12. (A. Davydov). On appelle *involution* un difféomorphisme dont le carré est la transformation identique. Une involution du plan est dite *admissible* pour un champ de vecteurs si ses points fixes forment une courbe et si les images des vecteurs du champ par cette involution changent de signe aux points de cette courbe.

Montrer qu'au voisinage d'un point non singulier toutes les involutions admissibles génériques sont équivalentes (se transforment l'une en l'autre par des difféomorphismes laissant invariante chaque orbite du champ).

[La solution de cet exercice nous donne la forme normale $p^2 = x$ d'une équation non résolue par rapport à la dérivée au voisinage d'un point générique (cette forme a été trouvée par L. Dara et Y. Brodski). L'équation $F(x, y, p) = 0$ définit une surface dans un espace à trois dimensions. Le plan tangent à cette surface en un point non régulier est vertical (tangent à l'axe p). Au voisinage d'un point non régulier générique on a une involution (qui permute les points d'intersection voisins de cette surface avec une droite verticale). Cette involution est admissible pour le champ de vecteurs tangent aux courbes intégrales de l'équation situées

sur la surface. La réduction de l'involution à la forme normale équivaut à la normalisation de l'équation par un difféomorphisme local du plan (x, y).]

13 (suite). Supposons que la courbe fixe d'une involution admissible pour un champ de vecteurs à point singulier de type foyer, col ou nœud passe par ce point singulier, les modules des valeurs propres du col ou du nœud étant distincts.

Montrer que deux telles involutions sont équivalentes au voisinage du point singulier si les tangentes à leurs courbes fixes au point singulier ne sont pas séparées par les directions propres.

[Ce théorème de Davydov nous fournit la forme normale $(p - kx)^2 = y$ d'une équation générique non résolue par rapport à la dérivée au voisinage du point non régulier en lequel le plan $dy = p\,dx$ est tangent à la surface $F = 0$; k est le seul module (invariant par les difféomorphismes) du « foyer, col ou nœud repliés », engendré par les projetées des courbes intégrales sur le plan (x, y).]

Les solutions des exercices 12 et 13 nous donnent des formes normales de familles de trajectoires d'un mouvement lent en théorie des oscillations de relaxation génériques avec deux variables lentes. Dans cette théorie sont donnés deux champs de vecteurs : l'un (le « rapide ») vertical, l'autre (le « perturbateur ») arbitraire, dans un espace des phases à trois dimensions fibré en droites verticales au-dessus d'un « plan de variables lentes ». Les zéros du champ rapide forment la « surface lente ». Les plans engendrés par les vecteurs des deux champs découpent le champ de directions du « mouvement lent » sur la surface lente. Il est question de la famille des projetées des courbes intégrales de ce champ situées sur la surface lente sur le plan des variables lentes.

Les valeurs critiques de la projetée de la surface lente sur le plan des variables lentes forment (dans un système générique) une courbe discriminant à points de rebroussement isolés. Au voisinage d'un point générique de cette courbe la famille des projetées est difféomorphe à la famille des paraboles semi-cubiques $(y - c)^2 = x^3$ (ceci résulte de la forme normale de l'exercice 12). En certains points de différentiabilité de la courbe discriminant la famille des projetées est difféomorphe à un foyer, un col ou un nœud repliés (exercice 13). Par ailleurs, dans le système générique on rencontre des points de différentiabilité de la courbe discriminant au voisinage desquels la famille peut être décrite de la manière suivante. Numérotons les courbes intégrales à l'aide du paramètre c et traitons la famille de leurs projetées sur le plan (x, y) comme une surface dans l'espace à trois dimensions (x, y, c), décomposée en courbes $c =$ const. Cette surface est difféomorphe (localement) à la surface de l' « ombrelle repliée » $u^2 = v^3 w^2$, décomposée en courbes $u + v + w =$ const. Enfin, au voisinage d'un point de rebroussement de la courbe discriminant la famille des projetées est décrite de façon analogue à l'aide d'une subdivision de la surface de la « queue d'aronde » $\{u, v, w : \lambda^4 + u\lambda^2 + v\lambda + w$ admet une racine multiple$\}$ en courbes $u =$ const. Contrairement aux précédentes, la dernière famille de projetées possède une infinité de modules même par rapport aux homéomorphismes du plan (x, y) (dans le cas d'une « ombrelle repliée » il n'existe pas de modules aux difféomorphismes infiniment différentiables près, mais dans le cas analytique on a une infinité de modules indépendants).

Les solutions des exercices 12 et 13 décrivent aussi les singularités de familles de lignes asymptotiques sur une surface d'un espace à trois dimensions (une famille de paraboles semi-cubiques en un point générique d'une ligne parabolique et un foyer, un nœud ou un col repliés en certains points de tangence de la ligne parabolique et de la direction asymptotique).

NOTATIONS FRÉQUEMMENT USITÉES

R — ensemble (groupe, corps) des nombres réels.
C — ensemble (groupe, corps) des nombres complexes.
Z — ensemble (groupe, anneau) des nombres entiers.
$x \in X \subset Y$ — élément x du sous-ensemble X de l'ensemble Y.
$X \cap Y$, $X \cup Y$ — intersection et union des ensembles X et Y.
$f\colon X \to Y$ — application f de l'ensemble X dans l'ensemble Y.
$x \mapsto y$ — l'application associe au point x le point y.
$f \circ g$ — produit d'applications (on commence par g).
$\forall$ — quantificateur universel (quel que soit).
$\exists$ — quantificateur existentiel (il existe).
* — exercice ou théorème facultatif (plus compliqué).
$\mathbf{R}^n$ — espace vectoriel de dimension n défini sur le corps **R**.

Sur l'ensemble $\mathbf{R}^n$ on peut étudier d'autres structures (exemple : des structures affine, euclidienne ou du produit direct de n droites). A chaque fois donc, on prendra bien soin de spécifier s'il s'agit d'un espace affine $\mathbf{R}^n$, d'un espace euclidien $\mathbf{R}^n$, d'un espace arithmétique $\mathbf{R}^n$, etc.

On appelle *vecteurs* les éléments d'un espace vectoriel. Les vecteurs sont désignés par des caractères semi-gras ($\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{\xi}$, etc.). Les vecteurs de l'espace $\mathbf{R}^n$ sont assimilés à une collection de n nombres. Nous écrirons par exemple $\boldsymbol{v} = (v_1, ..., v_n) = v_1\boldsymbol{e}_1 + ... + v_n\boldsymbol{e}_n$; un ensemble de n vecteurs $\boldsymbol{e}_i$ constitue une *base* de l'espace $\mathbf{R}^n$.

Nous serons souvent conduits à étudier des fonctions dépendant d'une variable réelle t appelée *temps*. Nous appellerons *vitesse* la dérivée par rapport à t et la désignerons le plus fréquemment par $\dot{x} = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$.

INDEX